Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

АЛГЕБРА 8

ГІМНАЗІЯ

Комунальний вищий професійний

Аркадій **Мерзляк**
Михайло **Якір**

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

Інтерактивний електронний додаток до підручника:

https://books.gymnasia.com.ua/qr/8a2mo3

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2025

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

УДК 373.167.1:512
М52

Підручник відповідає модельній навчальній програмі «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2025. — 272 с. : іл.

КОПІЯ КУРСОВОГО ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники та восьмикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на три параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе». Після кожного завдання в тестовій формі розміщені добірки задач, які допоможуть вам у підготовці до тематичного оцінювання.

У рубриці «Говоримо та пишемо українською правильно» наведено приклади правильної математичної мови.

Кожний пункт завершується рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

У рубриці «Коли зроблено уроки» подано оповідання з історії алгебри, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

Бажаємо успіху!

Електронний відгук

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книжці дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Вправи, позначені піктограмою ↔, на ваш розсуд можна використовувати для роботи в парах або групах.

Підручник підтримано інтерактивним електронним додатком, перехід до частин якого забезпечують QR-коди біля заголовків відповідних пунктів, а також біля завдань «Перевірте себе» в тестовій формі» (два QR-коди на два варіанти підсумкових завдань).

В електронному додатку є рубрика «Жива Алгебра», яка допомагає учням візуалізувати математичні поняття, такі як графіки функцій, геометричні фігури, алгебраїчні рівняння тощо. Вона дозволяє експериментувати з параметрами, бачити зміни в реальному часі та краще розуміти складні теми. Це робить навчання більш цікавим і ефективним. Відповідні місця в підручнику позначено піктограмою ЖА.

Також в електронному додатку до пунктів 10, 11 та 17 представлені розробки уроків, на яких діти за допомогою програми *GeoGebra* вчаться будувати графіки різноманітних функцій.

Поновити в пам'яті матеріал, вивчений минулого року, допоможе посилання на підручник для 7 класу в електронному вигляді: https://books.gymnasia.com.ua/qr/7dd3zh

або QR-код .

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

Комунальне видавництво

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу;



запитання для самоперевірки;



рубрика «Вправи»;



домашня практична робота;



завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;



вправи для роботи в парах або групах;



рубрика «Вправи для повторення»;



рубрика «Готуємося до вивчення нової теми»;



рубрика «Учимося застосовувати математику»;



рубрика «Учимося робити нестандартні кроки»;



рубрика «Говоримо та пишемо українською правильно»;



рубрика «Коли зроблено уроки»;



завдання «Перевірте себе» в тестовій формі»;



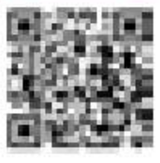
завдання «Готуємося до тематичного оцінювання»;



рубрика «Головне в параграфі»;



інтерактивні ілюстрації «Жива Алгебра»;



QR-код для переходу до інтерактивного електронного додатка.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

Корпоративне видавництво «Ранок»

§1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з дробами, чисельниками й знаменниками яких є вирази зі змінними; навчитеся додавати, віднімати, множити й ділити такі дроби; ознайомитеся з рівняннями, які складено за допомогою цих дробів.

Ви дізнаєтеся, за якими правилами можна замінити дане рівняння на більш просте.

Розширите своє уявлення про поняття «степінь», навчитеся підносити числа до степеня із цілим від'ємним показником.

Навчитеся будувати математичні моделі процесів, у яких збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів приводить до зменшення (збільшення) другої величини в таку саму кількість разів.

1. Раціональні дроби

Перед вивченням цього пункту радимо повторити зміст пп. 1 і 8 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто вирази, що складені із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число. Ось приклади цілих виразів:

$$x-y,\ \frac{a+b}{5},\ m^2+2m+n^2,\ \frac{1}{3}x-4,\ \frac{c}{4}+\frac{d}{7},\ x:5,\ y,\ 7.$$

У курсі алгебри 8 класу ми розглянемо **дробові вирази.**

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять ділення на вираз зі змінними*.

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x+\frac{a}{b},\ (x-y):(x+y),\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\ \frac{5}{x}.$$

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами.**

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте *ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль*.

Наприклад, вираз $2+\dfrac{a+2}{a-1}$ при $a=1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу при $a=1$ не існує. При всіх інших значеннях a цей вираз має зміст.

Означення:

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.

Наприклад, у розглянутому вище виразі допустимими значеннями для змінної a є всі числа, крім 1.

Допустимими значеннями змінних, які входять до цілого виразу, є всі числа.

Окремим видом раціонального виразу є **раціональний дріб.** Це дріб, чисельником і знаменником якого є многочлени[1]. Так, раціональні вирази

$$\frac{x}{7},\quad \frac{x^2-2xy}{x+y},\quad \frac{12}{a},\quad \frac{a+b}{5}$$

є прикладами раціональних дробів.

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменник раціонального дробу не може бути **нульовим многочленом**, тобто многочленом, який тотожно дорівнює нулю.

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального дробу, є всі значення змінних, при яких значення знаменника дробу не дорівнює нулю.

Схема на рисунку 1 ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.

Раціональні вирази

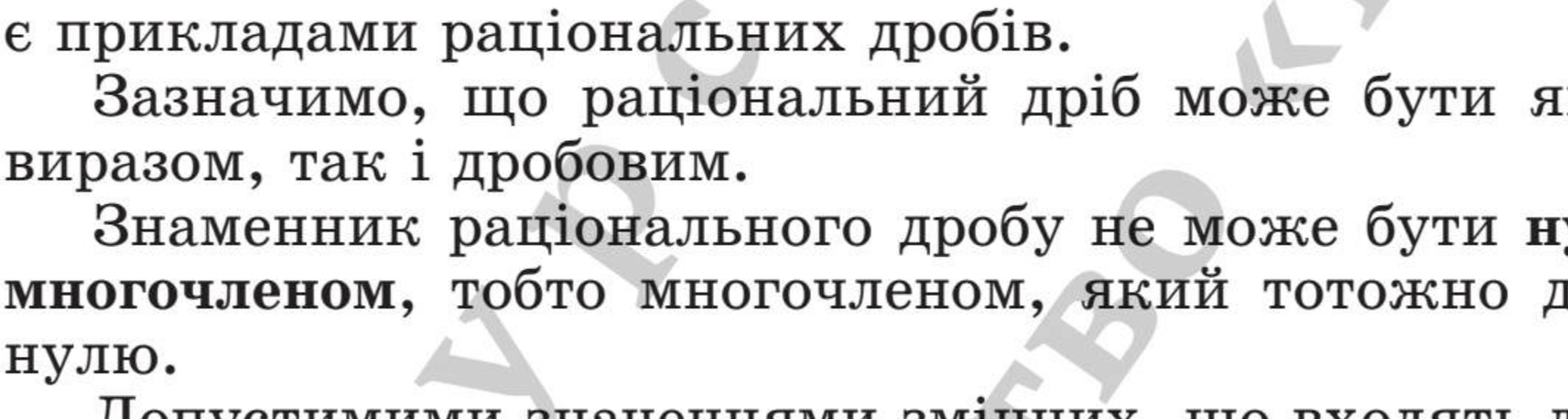


Рис. 1

[1] Нагадаємо, що числа й одночлени вважають окремими випадками многочленів.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

ПРИКЛАД. Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

Розв'язання. Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x=0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x=5$.

Отже, шуканими допустимими значеннями змінної є всі числа, відмінні від 0 і 5. ◄

1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих? **2.** Як разом називають цілі та дробові вирази? **3.** Які значення змінних називають допустимими? **4.** Які дроби називають раціональними? **5.** Окремим випадком яких виразів є раціональні дроби? **6.** Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

ВПРАВИ

1.° Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ є: 1) цілими виразами; 2) дробовими виразами; 3) раціональними дробами?

Обґрунтуйте ваші відповіді й обговоріть їх з однокласниками та однокласницями.

2.° Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, якщо:

1) $c=-3$; 2) $c=0$?

3.° Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

1) $m=-1$, $n=1$; 2) $m=4$, $n=-5$.

4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a=-4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x=-5$, $y=6$?

5.° Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу:

1) $2x-5$; 2) $\frac{18}{m}$; 3) $\frac{9}{x-5}$;

Комунальний заклад «Луганський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти»
Видавництво

4) $\frac{x-5}{9}$;

5) $\frac{2+y}{1+y}$;

6) $\frac{1}{x^2+4}$;

7) $\frac{5}{x^2-4}$;

8) $\frac{5}{|x|-4}$;

9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;

10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;

11) $\frac{x}{|x|+1}$;

12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{9}{y}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$;

3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;

4) $\frac{x}{|x|-3}$;

5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;

6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

7.• Придумайте раціональний дріб, який містить змінну x і має зміст при всіх значеннях x, крім: 1) $x=7$; 2) $x=-1$; 3) $x=0$ і $x=4$. Порівняйте ваші вирази з виразами, придуманими однокласниками й однокласницями.

8.• Запишіть раціональний дріб, який містить змінну y, допустимими значеннями якої є:

1) усі числа, крім 5;
2) усі числа, крім -2 і 0;
3) усі числа, крім 3, -3 і 6;
4) усі числа.

9.• Автомобіль проїхав по шосе a км зі швидкістю 75 км/год і по ґрунтовій дорозі 20 км зі швидкістю b км/год. За який час автомобіль проїхав увесь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення при $a=150$, $b=40$.

10.• Учень придбав зошити по m грн, заплативши за них 24 грн, і по 14 грн, заплативши за них n грн. Скільки зошитів придбав учень? Складіть вираз і знайдіть його значення при $m=8$, $n=56$.

11.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{1}{x^2}$ додатне;

2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ від'ємне.

12.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ недодатне;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ невід'ємне.

13.•• Відомо, що $5x-15y=1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x-3y$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$;

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА

3) $\dfrac{18y-6x}{9}$; 4) $\dfrac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

14.•• Відомо, що $4a+8b=10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b+a$; 2) $\dfrac{5}{a+2b}$; 3) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

15.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{x}}$; 2) $y=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$.

16.•• При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x}{x-\dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{10}{2+\dfrac{6}{x}}$?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

17. У таблиці подано приблизні курси обміну кількох поширених валют у липні 2023 р. Заповніть порожні клітинки таблиці.

Курси валют	гривня	долар США	євро	злотий
1 гривня =	1	0,0274		0,11
1 долар США =	36,5			
1 євро =	40,25	1,10	1	
1 злотий =				

18. Дмитро та Петро придбали у спільну власність майстерню з виготовлення меблів. Внесок Дмитра складав 65 % загальної суми, а Петро вніс решту. Чистий прибуток майстерні за квартал склав 93 000 грн. Яку суму із цього прибутку має отримати Петро?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

19. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^3; 2) $(a^5)^3$; 3) $a^5:a^3$; 4) $(a^8)^4:(a^2)^8$.

20. Розкладіть на множники:

1) $6a - 15b$;
2) $2a + ab$;
3) $7am + 7bn$;
4) $4x^2 - 12xy$;
5) $a^6 + a^2$;
6) $12m^2n - 4mn$;
7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $ab - ac + bd - cd$;
2) $3m + 3n - mx - nx$;
3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;
2) $9x^2 + 6x + 1$;
3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 9$;
2) $25 - 4y^2$;
3) $36m^2 - 49n^2$;
4) $a^2b^2 - 81$;
5) $100m^6 - 1$;
6) $a^{10} - b^6$;
7) $c^3 - d^3$;
8) $a^3 + 8$;
9) $27m^6 - n^9$.

24. Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7$;
2) $3b^3 - 3b$;
3) $2x^3 - 2xy^2$;
4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 4 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

25. Дано два числа: $a = \underbrace{44\ldots4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ цифр}}$. Чи можна підібрати такі m і n, щоб:

1) число a було дільником числа b;
2) число b було дільником числа a?

2. Основна властивість раціонального дробу



Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при будь-яких значеннях a.

Рівність $\dfrac{3a-1+2a+5}{a+1} = \dfrac{5a+4}{a+1}$ також природно вважати тотожністю. Проте вона виконується не при будь-яких

значеннях a. При $a = -1$ раціональні дроби, які входять у дану рівність, не мають змісту.

Уточнимо прийняті в 7 класі означення тотожно рівних виразів і означення тотожності.

Означення:

Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають тотожно рівними.

Означення:

Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають тотожністю.

Наприклад, рівність $\frac{a-2}{a-2} = 1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях a, тобто при всіх a, крім $a = 2$.

У 7 класі ми розглядали тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Як ви знаєте, основна властивість відношення виражається такою рівністю:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

де a, b і m — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дроби мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** й записують:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

де A, B і C — многочлени, причому многочлени B і C ненульові.

Електронний варіант підручника з сайту видавництва «Гімназія»

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний йому дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник C.

ПРИКЛАД 1. Скоротіть дріб:

1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Розв'язання. 1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді можна записати:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a\cdot 6a^2b^2}{4b^2\cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який отримуємо:

$$\frac{3(x+5y)}{3x}=\frac{x+5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники та скоротивши на спільний множник $y+2$, отримуємо:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}=\frac{(y+2)^2}{y(y+2)}=\frac{y+2}{y}.$$ ◀

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B} \text{ і } \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

Кожен із дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

ПРИКЛАД 2. Скоротіть дріб $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}.$$ ◀

Комунальний заклад «Київський університет імені Бориса Грінченка» Видавництво

ПРИКЛАД 3. Зведіть дріб:

1) $\frac{a^2}{5bc^3}$ до знаменника $15ab^3c^5$;

2) $\frac{a}{a+2b}$ до знаменника a^2-4b^2;

3) $\frac{a-b}{2a-3b}$ до знаменника $3b-2a$.

Розв'язання. 1) Оскільки $15ab^3c^5=5bc^3\cdot 3ab^2c^2$, то новий знаменник відрізняється від знаменника даного дробу множником $3ab^2c^2$. Отже, чисельник і знаменник даного дробу треба помножити на **додатковий множник** $3ab^2c^2$. Маємо:

$$\frac{a^2}{5bc^3}=\frac{a^2\cdot 3ab^2c^2}{5bc^3\cdot 3ab^2c^2}=\frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) Запишемо: $\frac{a}{a+2b}=\frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$.

3) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на число -1, отримуємо:

$$\frac{a-b}{2a-3b}=\frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)}=\frac{b-a}{3b-2a}.$$ ◀

ПРИКЛАД 4. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ і $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ і $\frac{6}{a^2+6a}$.

Розв'язання. 1) Можна **взяти за спільний знаменник** даних дробів добуток їхніх знаменників, який дорівнює $54a^6b^9$. Проте зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, сконструйований таким чином: його коефіцієнт 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 знаменників даних дробів, а кожну зі змінних a і b узято в степені з найбільшим показником степеня, з яким вона входить у знаменники даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6=9a^2b^6\cdot 2a^2$, то додатковим множником для дробу $\frac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6=6a^4b^3\cdot 3b^3$, отримуємо, що додатковим множником для дробу $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$.

Отже, отримуємо: $\frac{2m}{9a^2b^6}=\frac{2m\cdot 2a^2}{9a^2b^6\cdot 2a^2}=\frac{4a^2m}{18a^4b^6}$;

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3}=\frac{5n^2\cdot 3b^3}{6a^4b^3\cdot 3b^3}=\frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Тут спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Маємо:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, буває корисним попередньо розкласти їхні знаменники на множники:

$$a^2-36=(a+6)(a-6),\ a^2+6a=a\,(a+6).$$

Отже, спільним знаменником даних дробів може слугувати вираз $a\,(a+6)(a-6)$.

Тоді $\dfrac{4a^2}{a^2-36}=\dfrac{{}^{a/}4a^2}{(a+6)(a-6)}=\dfrac{4a^3}{a(a+6)(a-6)}=\dfrac{4a^3}{a^3-36a};$

$$\frac{6}{a^2+6a}=\frac{{}^{a-6/}6}{a(a+6)}=\frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)}=\frac{6a-36}{a^3-36a}.\ \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 5. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язання. Дана функція визначена при всіх значеннях x, крім 1. Маємо:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

тобто $y=x+1$, де $x\neq 1$.

Отже, шуканим графіком є всі точки прямої $y=x+1$, за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 2). $\blacktriangleleft$

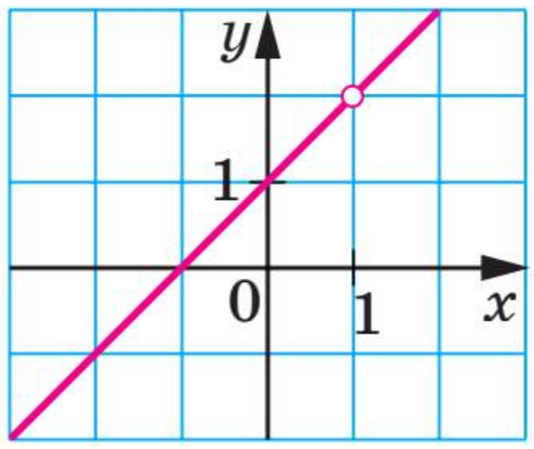


Рис. 2

ПРИКЛАД 6. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння $(a^2-9)x=a+3$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(a+3)\times$ $\times(a-3)x=a+3$ і розглянемо три випадки.

1) $a=3$.

Тоді отримуємо рівняння $0x=6$, яке не має коренів.

2) $a=-3$.

У цьому випадку отримуємо рівняння $0x=0$, коренем якого є будь-яке число.

КОНКУРСНЕ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

3) $a \neq 3$ і $a \neq -3$.

Тоді $x = \dfrac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \dfrac{1}{a-3}$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не має коренів; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -3$, то $x = \dfrac{1}{a-3}$. ◀

1. Які вирази називають тотожно рівними? **2.** Що називають тотожністю? **3.** Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Іменники третьої відміни у родовому та давальному відмінках однини мають закінчення **-і**: *ванілі, герані, галузі, ночі*.

Однак іменники на **-ть** після приголосного в родовому та давальному відмінках однини можуть мати два варіанти закінчень **(-і/-и)**: *рівності / рівности, властивості / властивости, ірраціональності / ірраціональности, пропорційності / пропорційности, тотожності / тотожности, швидкості / швидкости, суперечності / суперечности*.

ВПРАВИ

26.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює дріб $\dfrac{6a^2}{24a}$:

1) $\dfrac{a^2}{4}$; 2) $\dfrac{a}{4}$; 3) $\dfrac{12a^3}{48a}$; 4) $\dfrac{3a^4}{12a^2}$?

27.° Чи є тотожністю рівність:

1) $\dfrac{3m^2}{7m} = \dfrac{3m}{7}$; 2) $\dfrac{4x^8}{16x^4} = \dfrac{x^2}{4}$; 3) $\dfrac{8m^2}{9n} = \dfrac{8m^5}{9nm^3}$?

28.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{14a^3}{21a}$; 3) $\dfrac{5x}{20x}$; 5) $\dfrac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\dfrac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\dfrac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\dfrac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\dfrac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\dfrac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

29.° Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть отриманий дріб:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

30.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

31.° Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

32.° Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{15b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{\quad} = \frac{\quad}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}$.

33.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$ до знаменника b^5; 3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$;

2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$; 4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

34.° Зведіть дріб:

1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника y^8; 3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$.

2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$;

35.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$; 5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 6) $\frac{4a-20b}{12ab}$; 10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$; 7) $\frac{6x+12}{6x}$; 11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА

36.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;
2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;
3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;
4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;
5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

37.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;
2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;
3) $\frac{4x-16y}{16y}$;
4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;
5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;
6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;
7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;
8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;
9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

38.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a+8$;
2) $\frac{m}{m-3n}$ до знаменника m^2-9n^2;
3) $\frac{x}{2x-y}$ до знаменника $7y-14x$;
4) $\frac{5b}{2a+3b}$ до знаменника $4a^2+12ab+9b^2$;
5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ до знаменника x^3-1.

39.° Подайте вираз $x-5y$ у вигляді дробу зі знаменником:
1) 2; 2) x; 3) $4y^3$.

40.° Зведіть дріб $\frac{6}{b-4}$ до знаменника:
1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) b^2-4b; 4) b^2-16.

41.° Подайте дані дроби у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{1}{2a^3}$;
2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ і $\frac{4y}{3m^2n^4}$;
3) $\frac{a+b}{a-b}$ і $\frac{2}{a^2-b^2}$;
4) $\frac{3d}{m-n}$ і $\frac{8p}{(m-n)^2}$;
5) $\frac{x}{2x+1}$ і $\frac{x}{3x-2}$;
6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ і $\frac{a}{a^2-b^2}$;

КНГУ РВІДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

7) $\frac{3a}{4a-4}$ і $\frac{2a}{5-5a}$;

8) $\frac{7a}{b-3}$ і $\frac{c}{9-b^2}$.

42.° Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ і $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ і $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ і $\frac{z}{y^2-25}$;

4) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ і $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

5) $\frac{6a}{a-2b}$ і $\frac{3a}{a+b}$;

6) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ і $\frac{c}{4-c}$.

43.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$.

44.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;

2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;

3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

45.• Знайдіть значення дробу, попередньо скоротивши його:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, якщо $a=-2$, $b=0{,}4$;

2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, якщо $b=\frac{1}{3}$, $c=-6$;

3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, якщо $x=1{,}2$, $y=-3$;

4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, якщо $a=-0{,}1$.

46.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$ при $x=2{,}5$, $y=-2$;

2) $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$ при $c=-4$.

47.• Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ і $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ і $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ і $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ і $\frac{4}{x^2+2x+1}$.

Комунальне видавництво «Ігнатій»

48.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть значення виразу $\dfrac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\dfrac{x}{y}=2$.

Як ви думаєте, чи існує спосіб розв'язання цієї задачі, відмінний від вашого? Поцікавтеся, яке розв'язання знайшли ваші однокласники й однокласниці.

49.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть значення виразу $\dfrac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, якщо $\dfrac{a}{b}=5$.

50.$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $2a-6b=1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{8}{a-3b}$;

2) $\dfrac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

51.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть значення виразу $\dfrac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$, якщо $4m+3n=8$.

52.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує таке значення a, при якому дріб $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ набуває від'ємного значення?

53.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

2) $y=\dfrac{x-3}{3-x}$;

3) $y=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}-\dfrac{2x^2-4x}{x}$;

4) $y=\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{2}{x+4}$.

54.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$;

2) $y=x-\dfrac{x}{x}$;

3) $y=\dfrac{x^2-3x}{x}-\dfrac{2x^2-2}{x^2-1}$.

55.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{|x|}{x}$;

2) $y=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$.

56.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $ax=1$;

2) $ax=a$;

3) $(a-6)\,x=a^2-12a+36$;

4) $(a^2-4)\,x=a-2$.

57.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $(a+3)\,x=3$;

2) $(a^2-9a)\,x=a^2-18a+81$.

Київський видавничий центр «Академія»

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

58. Щомісячний бюджет сім'ї Петренків формується із заробітної плати батька (24 600 грн) і матері (25 400 грн), підвищеної стипендії доньки (2910 грн) та пенсії дідуся (8690 грн). На оплату комунальних послуг витрачається 12 % загального бюджету, на харчування — 34 %, на покупку непродовольчих товарів — 22 %, на транспортні витрати — 10 %. Решта грошей йде на оплату відпочинку, розваг, медичних послуг і заощадження. Скільки гривень залишається на останні перераховані статті сімейного бюджету?

Дізнайтеся, з яких витрат складається бюджет вашої родини, родин ваших родичів і знайомих. Проведіть дослідження та з'ясуйте, на які статті бюджету витрачається найбільше коштів. Радимо під час виконання цього проєкту об'єднатися з однокласниками й однокласницями в групи, щоб отримати та обробити якомога більше даних.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

59. Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x\,(3 - 2x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

60. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x - 1$.

61. Якого найменшого значення та при яких значеннях a і b набуває вираз $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

62. На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 55. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},$$
$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

За такими самими правилами додають і віднімають раціональні дроби з однаковими знаменниками.

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

ПРИКЛАД 1. Виконайте віднімання:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Розв'язання.

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}$.

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$
$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=$
$=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}$. ◀

Копія. Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2. Відомо, що $\frac{m}{n} = -3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді суми цілого та дробового виразів:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Якщо $\frac{m}{n} = -3$, то $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$.

Отже, $\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$. ◀

ПРИКЛАД 3. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого та дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Вираз $2n + 3$ набуває натуральних значень при будь-якому натуральному n. Тому вираз $2n + 3 - \frac{15}{n}$ набуває цілих значень, якщо значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілими числами. Це можливо лише при таких натуральних значеннях n: 1, 3, 5, 15.

Відповідь: $n = 1$, або $n = 3$, або $n = 5$, або $n = 15$. ◀

1. Як додати раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками?

ВПРАВИ

63.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n} + \frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d} - \frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6} - \frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab} + \frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd} + \frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2} - \frac{2m+3}{10m^2}$.

КОМУНАЛЬНИЙ ВИДАВНИЧИЙ ЗАКЛАД «ГІМНАЗІЯ»

64.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;

2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;

3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;

4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;

5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;

6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

65.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;

2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;

3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;

4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;

6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

66.° Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

67.° Виконайте дії:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;

3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;

4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;

6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

68.° Спростіть вираз:

1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;

3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

69.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;

2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

70.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5x+3}{x^2-16}+\dfrac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;

2) $\dfrac{a^2+a}{a^2-9}-\dfrac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

71.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{5n-1}{20n}-\dfrac{7n-8}{20n}-\dfrac{8n+7}{20n}$;

2) $\dfrac{3k}{k^3-1}+\dfrac{4k+1}{1-k^3}+\dfrac{k^2}{1-k^3}$.

72.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{6a-1}{16a-8}+\dfrac{4a-7}{16a-8}+\dfrac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\dfrac{9m+2}{m^2-4}-\dfrac{m-9}{4-m^2}+\dfrac{1-7m}{m^2-4}$.

73.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\dfrac{15-8a}{(a-1)^2}-\dfrac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\dfrac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\dfrac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\dfrac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\dfrac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

74.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\dfrac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\dfrac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\dfrac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

75.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-\dfrac{(a-b)^2}{4ab}=1$;

2) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

76.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\dfrac{a^2-6}{(a-2)^4}-\dfrac{7a-4}{(a-2)^4}+\dfrac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

77.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\dfrac{2-b^2}{(b-5)^6}-\dfrac{7-3b}{(b-5)^6}+\dfrac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

78.°° Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\dfrac{x+3}{x}$;

2) $\dfrac{a^2-2a-5}{a-2}$.

79.°° Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\dfrac{4a-b}{a}$;

2) $\dfrac{b^2+7b+3}{b+7}$.

Конкурс видавництва «Мандрівець»

80.$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Як ви думаєте, чи існує спосіб розв'язання цієї задачі, відмінний від вашого? Обговоріть з однокласниками й однокласницями способи розв'язання цієї задачі.

81.$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $\frac{a}{b}=-2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

82.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

83.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

84. За 5 років, із 2019 по 2023 рр., українські школярки здобули на Європейських математичних олімпіадах серед дівчат (EGMO) 19 медалей. Кількість срібних медалей становить 220 % від кількості золотих, а кількість бронзових — 60 % від кількості золотих медалей. Скільки золотих медалей здобули за цей період наші дівчата?

Пропонуємо вам провести таке проєктне дослідження: зібрати інформацію про те, як виступала команда України на EGMO, починаючи з першої олімпіади (2012 р.). Побудуйте відповідні діаграми, скориставшись комп'ютерними програмами *Excel*, *Word*, *Visio*. Радимо створити групу з ваших однокласників і однокласниць для вивчення історії виступів наших дівчат.



85. Розв'яжіть рівняння:

1) $1-4(x+1)=1{,}8-1{,}6x$;

2) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x=10x-11$.

86. Доведіть, що вираз $(a+4)(a-8)+4(2a+9)$ при всіх значеннях a набуває невід'ємних значень.

Конкурс видавництво «Ранок»

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

87. Замість зірочки запишіть такий одночлен, щоби справджувалася рівність:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

88. Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби справджувалася рівність:

1) $* \cdot (a-b) = (a+b)(a-b)^2$; 2) $(a+10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$.

89. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{2}{3b}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ і $\frac{3n}{p^2q^3}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ і $\frac{6}{m+n}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ і $\frac{y}{x+y}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ і $\frac{1}{y^2-6y}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ і $\frac{1}{a^2+a}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

90. Чи може парне число мати непарних дільників більше, ніж парних?

4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість раціонального дробу, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками можна звести до додавання і **віднімання дробів з однаковими знаменниками.**

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$.

Можна записати: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$, $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тоді $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Тут за **спільний знаменник** вибрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найзручнішим спільним знаменником.

Комунальний заклад «Харківська спеціалізована школа І–ІІІ ступенів № 161 Харківської міської ради» Видавництво «Гімназія»

Нагадаємо, щоб знайти спільний знаменник звичайних дробів, ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно, щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, може виявитися зручним попередньо розкласти знаменники на множники.

ПРИКЛАД 1. Спростіть вираз:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

Розв'язання. 1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен a^2bc. Отже,

$$\frac{{}^{a/}b+1}{abc}+\frac{{}^{b/}1-a}{a^2c}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{{}^{m-n/}m}{7(m+n)}-\frac{{}^{m+n/}n}{7(m-n)}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Маємо:

$$\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\frac{{}^{n+7/}6}{n-7}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$$

$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=$$

$$=\frac{{}^{3/}2a}{(a-5)^2}-\frac{{}^{a-5/}1}{3(a-5)}=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Тоді

$$\frac{{}^{x-2/}x}{x-4}-\frac{{}^{x-4/}x+2}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$ ◀

Київський видавничий коледж «Видавничий коледж»

ПРИКЛАД 2. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{21c^2}{7c-2}-3c$.

Розв'язання. Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{3c}{1}{}^{\backslash 7c-2}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$

Зауважимо, що сума й різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

1. Як виконати додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками? **2.** Що є сумою та різницею двох раціональних дробів?

ВПРАВИ

91.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$;
2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$;
3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$;
4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$;
5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$;
6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$;
7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$;
8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;
9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

92.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$;
2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$;
3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$;
4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$;
5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;
6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

93.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;
5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;
6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;
7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
8) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
9) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
10) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

Комунальний заклад "Вільнянський ліцей" Вільнянської міської ради Запорізької області

94.° Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;
2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
3) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
4) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
5) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;
6) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

95.° Виконайте дії:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;
2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;
6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

96.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

97.° Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;
2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;
3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;
4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;
5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;
6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

98.° Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;
2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;
3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;
4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

99.• Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;
5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;
6) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА «ГІМНАЗІЯ»

100.• Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;

2) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;

3) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

4) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$.

101.• Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;

2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;

3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;

4) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$.

102.• Спростіть вираз:

1) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

2) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

103.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{b}+1$;

2) $\frac{x}{y}-x$;

3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;

4) $2-\frac{3b+2a}{a}$;

5) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

6) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

104.• Виконайте дії:

1) $a-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$;

3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;

4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;

5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

105.• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

106.• Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

Копія. Видавництво «Електронний учень»

3) $\dfrac{2a}{4a^2-1}-\dfrac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\dfrac{b-2}{b^2+6b+9}-\dfrac{b}{b^2-9}$;

5) $\dfrac{x-6}{x^2+3x}+\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x-3}{x}$;

6) $\dfrac{y+2}{y-2}-\dfrac{y-2}{y+2}-\dfrac{16}{y^2-4}$.

107.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від значення змінної:

1) $\dfrac{2x+1}{2x-4}+\dfrac{2x-1}{6-3x}-\dfrac{x+7}{6x-12}$;

2) $\dfrac{24-2a}{a^2-16}-\dfrac{a}{2a-8}+\dfrac{4}{a+4}$.

108.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1-a+\dfrac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\dfrac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\dfrac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\dfrac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

109.• Спростіть вираз:

1) $b+7-\dfrac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\dfrac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

110.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\dfrac{7}{2a-4}-\dfrac{12}{a^2-4}-\dfrac{3}{a+2}$, якщо $a=5$;

2) $\dfrac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\dfrac{m+4n}{2m-8n}$, якщо $m=3$, $n=0{,}5$.

111.• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{6}{5x-20}-\dfrac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x=5$;

2) $\dfrac{2y-1}{2y}-\dfrac{2y}{2y-1}-\dfrac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y=-2\dfrac{3}{7}$.

112.• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{6}{a^2-1}=\dfrac{2}{a^2-1}$;

3) $\dfrac{2a^2+4}{a^2-1}-\dfrac{a-2}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{1}{a-1}$.

113.• Знайдіть різницю дробів:

1) $\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\dfrac{1}{b+3}-\dfrac{b^2-6b}{b^3+27}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ІЛЛІЯ»

114.•• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\dfrac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;

2) $1-\dfrac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\dfrac{2b}{2b+1}$.

115.•• Доведіть тотожність

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

116.•• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4b}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+ab}+\dfrac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\dfrac{1}{(a-5b)^2}-\dfrac{2}{a^2-25b^2}+\dfrac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\dfrac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\dfrac{x+5}{y-2}$.

117.•• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{a+3}{a^2-3a}+\dfrac{a-3}{3a+9}+\dfrac{12}{9-a^2}=\dfrac{a-3}{3a}$;

2) $\dfrac{b-4}{2a-1}-\dfrac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\dfrac{2}{2a-1}$.

118.•• Доведіть тотожність

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

119.•• Доведіть тотожність

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

120.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

121.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

КОПІЯ КУРС С НАВЧАЛЬНОГО ВИДАВНИЦТВА «ГІМНАЗІЯ»

122.* Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

123.* Доведіть тотожність

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

124.* Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4.$$

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

125. За видатні успіхи в навчанні студент університету Олесь отримує академічну стипендію президента України в розмірі 4400 грн. З першої стипендії він 70 % віддав до сімейного бюджету, 20 % залишив собі на кишенькові витрати, а на решту грошей купив матері троянди. Яку найбільшу кількість троянд він зміг придбати, якщо одна троянда коштує 70 грн і в букеті має бути непарна кількість квітів?

126. Зошит коштує 19 грн. У покупця є монети лише по 5 грн, а в продавчині — лише по 2 грн. Чи може покупець розрахуватися за зошит без додаткового розміну грошей? У разі ствердної відповіді визначте, яку найменшу кількість монет відповідної вартості повинні мати покупець і продавчиня.

127. У 1990 р. у Києві нараховувалася 31 станція метрополітену, а в 2024 р. — 52 станції. На скільки відсотків за цей час зросла кількість станцій метрополітену в Києві? Відповідь округліть до десятих.

↔ Створіть групу з ваших однокласників і однокласниць для вивчення історії розвитку метрополітену в Україні. Дізнайтеся, у яких містах нашої країни є метрополітен. Побудуйте стовпчасті діаграми, які відображатимуть зростання кількості станцій метрополітену. Радимо для побудови діаграм скористатися відповідними комп'ютерними програмами, такими як *Excel*, *Word*, *Visio*. За потреби проконсультуйтеся в учителя / учительки інформатики.

Копія видавництва

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

128. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$;

2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

129. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

130. Укажіть число, обернене до числа:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

131. Знайдіть значення добутку:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

132. Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$;

2) $8:\frac{4}{17}$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

133. Знайдіть значення степеня:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$;

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

134. Два пороми одночасно відпливають від протилежних берегів річки та перетинають її перпендикулярно до берегів. Швидкості поромів сталі, але різні. Пороми зустрічаються на відстані 720 м від одного з берегів, після чого продовжують рух. Дістався берегів, пороми відразу починають рухатися назад і через деякий час зустрічаються на відстані 400 м від другого берега. Яка ширина річки?

Комунальний заклад «Київський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Київської обласної ради
Видавництво «Інтелект»

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Який із наведених виразів є цілим?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

2. При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

3. При яких значеннях аргументу функція $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ не визначена?

А) -1; 1; Б) 1; В) -2; -1; 1; Г) -2; 1.

4. Скоротіть дріб $\frac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.

5. Якому з наведених дробів тотожно дорівнює дріб $\frac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.

6. Виконайте віднімання: $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$.

А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) -5.

7. Виконайте додавання: $\frac{4-m}{m-3}+\frac{2m-5}{3-m}$.

А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) -3.

8. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

Комунальне видавництво «Ірпінь»

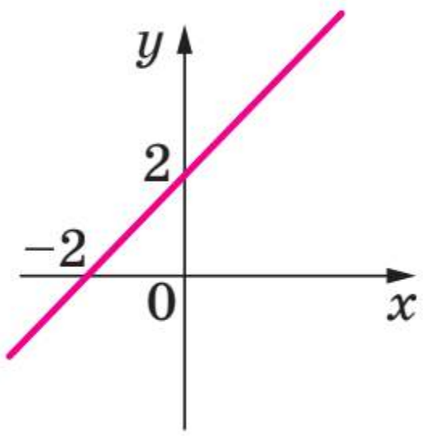
9. Спростіть вираз $\dfrac{2m+1}{3m-2}-\dfrac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\dfrac{1}{(3m-2)^2}$; Б) $\dfrac{1}{3m-2}$; В) $\dfrac{m}{(3m-2)^2}$; Г) $\dfrac{m}{3m-2}$.

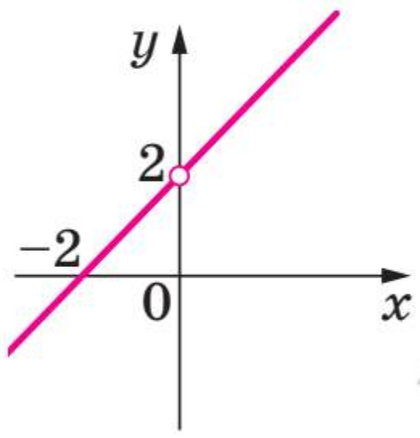
10. Спростіть вираз $\dfrac{a-12}{a^2+4a}-\dfrac{a-4}{a}+\dfrac{a}{a+4}$.

А) $\dfrac{4}{a}$; Б) $\dfrac{1}{a}$; В) a; Г) $a+4$.

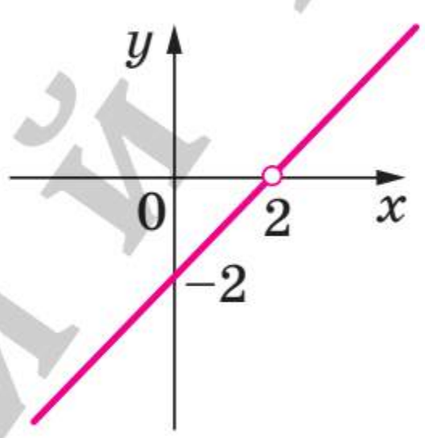
11. На якому рисунку зображено графік функції $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$?



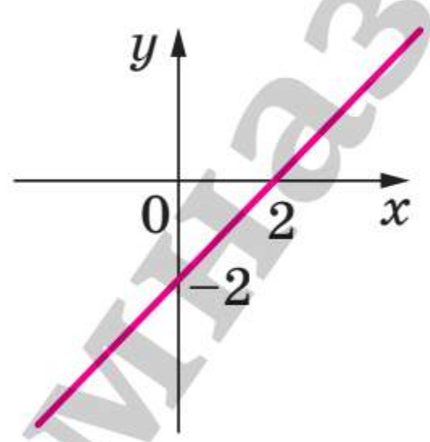
А)



Б)



В)



Г)

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А–Д).

Вираз	Тотожно рівний вираз
1) $\dfrac{ab-3a}{3b-b^2}$	А) $\dfrac{b}{a}$
2) $\dfrac{a^2-ab}{3a-3b}$	Б) $\dfrac{a}{b}$
3) $\dfrac{ab-3b^2}{a^2-3ab}$	В) $-\dfrac{a}{b}$
	Г) $\dfrac{a}{3}$
	Д) $-\dfrac{3}{a}$

Комунальний заклад освіти «Київський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Видавництво «Імідж»

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° При яких значення змінної має зміст вираз $\dfrac{x-5}{x+6}$?

2.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{35a^{10}b^8}{21a^5b^{16}}$;

2) $\dfrac{9x+6xy}{3xy}$;

3) $\dfrac{c^2-64}{2c+16}$;

4) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}$.

3.° Виконайте віднімання:

1) $\dfrac{9m+5n}{10m^3}-\dfrac{5n-m}{10m^3}$;

2) $\dfrac{3x+4}{8x^2}-\dfrac{3x+2}{6x^3}$.

4.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{32}{a^2+8a}-\dfrac{4}{a}$;

2) $\dfrac{c+3}{c-3}-\dfrac{c-2}{c+3}$;

3) $5b-\dfrac{20b^2}{4b+1}$;

4) $\dfrac{a+3}{2a+2}-\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{3}{a^2-1}$.

5.• Відомо, що $\dfrac{m+3n}{n}=7$. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{m}{n}$;

2) $\dfrac{9m-n}{m}$.

6.•• Побудуйте графік функції

$$y=\frac{2x^2+x}{x}-\frac{x^2+6x+9}{x+3}.$$

5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Корпоративний курс видавництво «Підручники і посібники»

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.

Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.

ПРИКЛАД 1. Виконайте дії:

1) $\frac{21c^6}{b^8}\cdot\frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x-12)\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}$;

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9}:\frac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{21c^6}{b^8}\cdot\frac{b^2}{14c^4}=\frac{21c^6\cdot b^2}{b^8\cdot 14c^4}=\frac{3c^2}{2b^6}$.

2) Подавши многочлен $2x-12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$(2x-12)\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=\frac{2x-12}{1}\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=\frac{2(x-6)\cdot 4x}{(x-6)^2}=\frac{8x}{x-6};$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9}:\frac{a^2-4b^2}{3a+27}=\frac{a(a+2b)}{a+9}\cdot\frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{3a}{a-2b}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)=\frac{5c^2-35c}{c+2}:\frac{c-7}{1}=\frac{5c(c-7)}{c+2}\cdot\frac{1}{c-7}=\frac{5c}{c+2}$. ◀

Правило множення двох дробів можна узагальнити для випадку, коли треба **знайти добуток трьох і більше раціональних дробів**. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C\cdot P}{B\cdot D\cdot Q}.$$

ПРИКЛАД 2. Спростіть вираз $\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}:\frac{4a^2}{9bc^3}$.

Конспект вирази

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}:\frac{4a^2}{9bc^3}=\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}\cdot\frac{9bc^3}{4a^2}=\frac{2a^5\cdot 10b^2\cdot 9bc^3}{15b^3\cdot 7c^4\cdot 4a^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 10\cdot 9\cdot a^5b^3c^3}{15\cdot 7\cdot 4\cdot a^2b^3c^4}=\frac{3a^3}{7c}.\ \blacktriangleleft$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального n, $n>1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n\text{ множників}}=\frac{\overbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}^{n\text{ множників}}}{\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{n\text{ множників}}}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n=1$ домовилися, що $\left(\frac{A}{B}\right)^1=\frac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},$$

де n — натуральне число.

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

ПРИКЛАД 3. Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Розв'язання. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3=-\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3=-\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3}=-\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}.\ \blacktriangleleft$

1. Що є добутком двох раціональних дробів? **2.** Що є часткою двох раціональних дробів? **3.** Як піднести раціональний дріб до степеня?

ВПРАВИ

135.° Якому з наведених виразів дорівнює добуток $\frac{a^3}{c^8}\cdot\frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

КУРС СТАВ ВИДАВНИЦТВО КЛАС

136.° Виконайте множення:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$;
2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$;
5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;
7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;
8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

137.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$;
2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;
6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

138.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$;
2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;
4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;
5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$;
6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;
7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;
8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;
9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;
10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$.

139.° Виконайте множення:

1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$;
2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;
3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$;
4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$;
5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$;
6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$.

140.° Якому з наведених виразів дорівнює частка $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$;
2) $\frac{c^6}{4}$;
3) $4c^3$;
4) $4c^6$.

Видавництво «Академія»

141.° Виконайте ділення:

1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$;
2) $\frac{3b}{8} : b$;
3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$;
4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
6) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;
7) $24a^3 : \frac{12a^2}{b}$;
8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$.

142.° Знайдіть частку:

1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$;
2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$;
3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$;
4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$;
5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$;
6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right)$.

143.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$;
2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$;
3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$;
4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$;
5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$;
6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;
7) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;
8) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

144.° Виконайте ділення:

1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$;
2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$;
3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$;
4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;
5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;
6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

145.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$;
2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$;
3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;
4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$;
5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;
6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

146.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$;

2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$;

3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$;

4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

147.• Спростіть вираз:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8}:\frac{88m^4}{51n^4}:\frac{21m^6}{16n^2}$;

3) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3:\frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

4) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$.

148.• Спростіть вираз:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2}:\frac{7c^8}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

149.• Замініть змінну x таким виразом, щоб утворилася тотожність:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$;

2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

150.• Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

7) $\frac{a^3+8}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

8) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$.

151.• Спростіть вираз:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

6) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

Комунальний заклад «Видавництво «Академія»

152.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\dfrac{a^2-81}{a^2-8a}:\dfrac{a-9}{a^2-64}$, якщо $a=-4$;

2) $\dfrac{x}{4x^2-4y^2}:\dfrac{1}{6x+6y}$, якщо $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\dfrac{3a-9}{4a}$, якщо $a=0{,}5$.

153.• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{1}{a^2-ab}:\dfrac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a=2\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{3}{7}$.

2) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\dfrac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a=4$, $b=-5$.

154.•• Відомо, що $x-\dfrac{1}{x}=9$. Знайдіть значення виразу $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

155.•• Відомо, що $3x+\dfrac{1}{x}=-4$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

156.•• Дано: $x^2+\dfrac{16}{x^2}=41$. Знайдіть значення виразу $x+\dfrac{4}{x}$.

З'ясуйте з однокласниками й однокласницями, скільки розв'язків має задача. Обґрунтуйте вашу думку.

157.•• Дано: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $x-\dfrac{1}{x}$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

158. Під час передвиборчої кампанії один із кандидатів на посаду мера заявив: «Подивіться на графік дорожньо-транспортних пригод. Зверніть увагу, наскільки вище розташована точка, яка вказує на кількість автомобільних аварій у 2024 р., порівняно з попередніми роками. На жаль, доводиться констатувати, що в 2024 р. відбулося вибухове зростання кількості ДТП у нашому місті». Як ви вважаєте, чи коректно кандидат інтерпретував інформацію, подану на графіку (рис. 3)? Поясніть свою відповідь. Обговоріть вашу думку з однокласниками та однокласницями.

КОПІЯ УРОКУ З ПІДРУЧНИКА ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»



Рис. 3

159. На рисунку 4 подано графік (червона ламана) роботи майстра-плиточника протягом дня. Синьою прямою показано графік його роботи, якби він клав плитку протягом дня з постійною швидкістю.

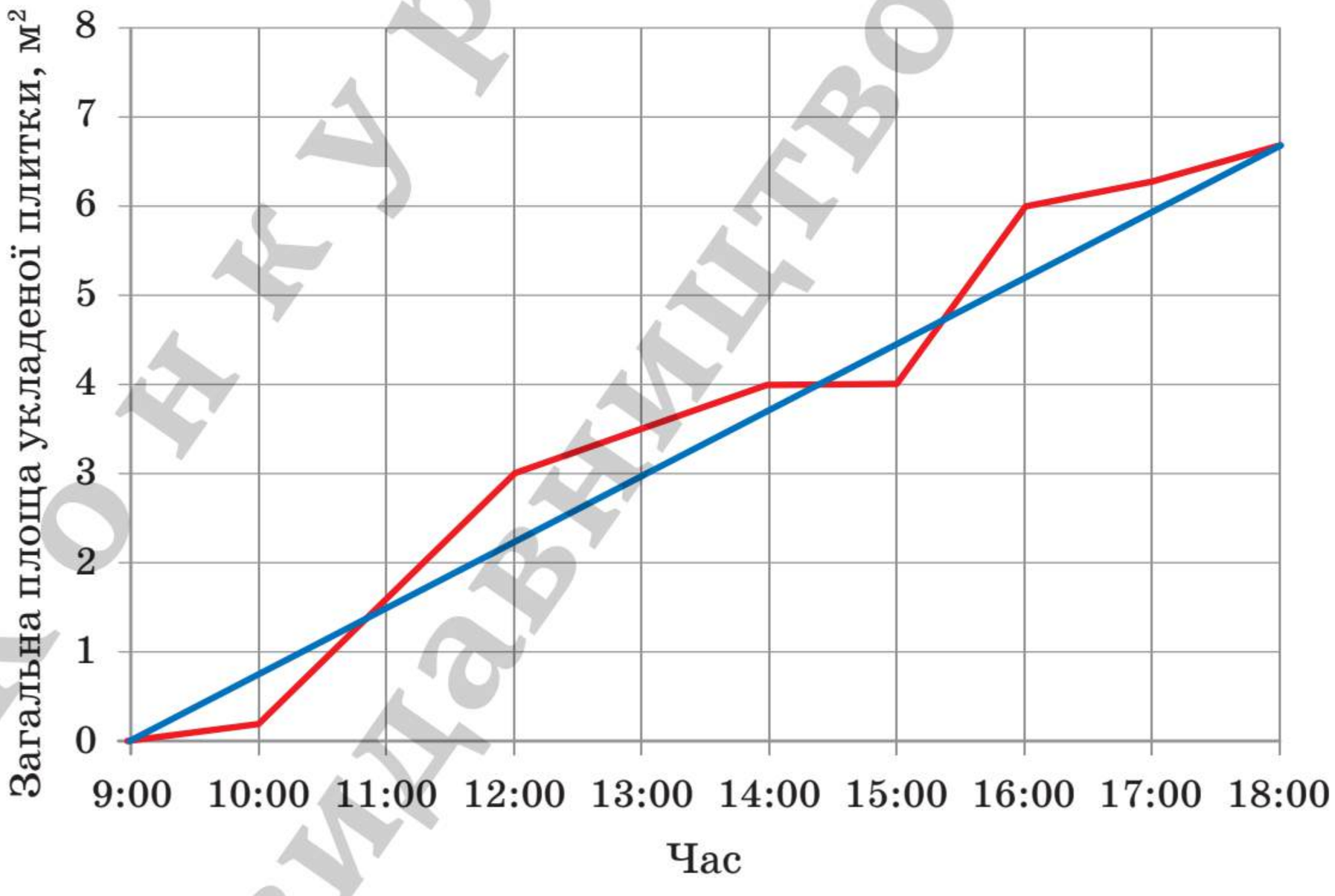


Рис. 4

КОПІЯ КУРСУ ВІД ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

1) Коли майстер працював продуктивніше: з 9:00 до 10:00 або з 15:00 до 16:00?
2) Як ви думаєте, чи була в майстра перерва на обід у цей день?
3) Скільки квадратних метрів плитки викладав майстер у середньому за одну годину цього дня?

Обговоріть ваші відповіді з однокласниками й однокласницями.

160. На графіку (рис. 5) подано дані деякого дослідження про середній зріст молоді підліткового та юнацького віку.

1) Який середній зріст мають 20-річні дівчата?
2) У якому віці хлопці й дівчата мають однаковий середній зріст?
3) Говорять, що починаючи із 14 років, юнаки ростуть швидше за дівчат. Чи підтверджує дане дослідження це твердження?

Обговоріть вашу думку з однокласниками й однокласницями.

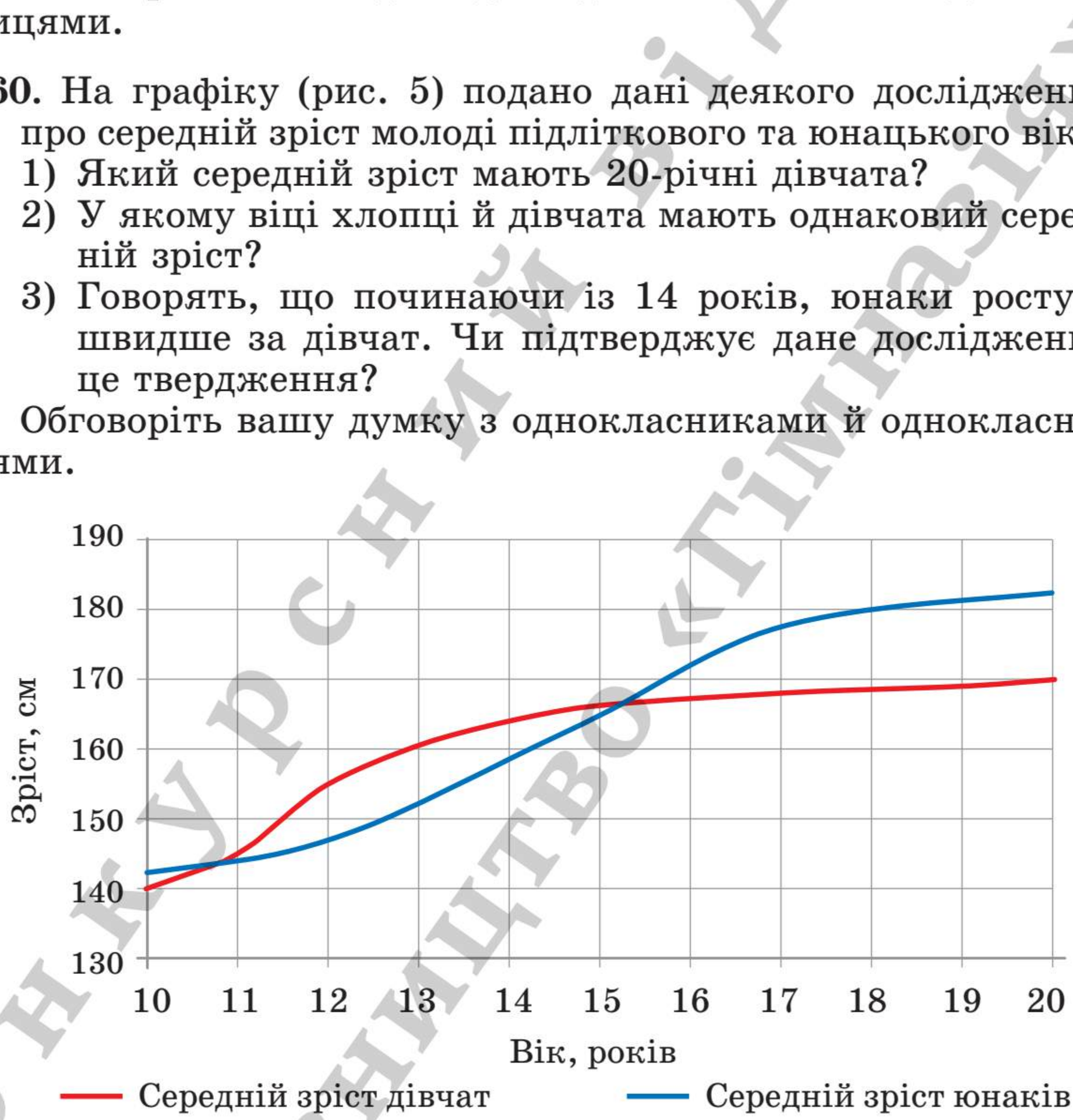


Рис. 5

161. О 6:00 ранку сім'я вирушила в подорож на автомобілі. На рисунку 6 подано графік, який показує зміни кількості пального в бензобаку автомобіля протягом цієї подорожі.

1) О котрій годині автотуристи дісталися до місця призначення?
2) Скільки разів протягом дня мандрівники заїжджали на автозаправну станцію?

НАВЧАЛЬНО-ВИДАВНИЧЕ ТОВАРИСТВО «ГІМНАЗІЯ»

3) Як ви думаєте, де були і що робили туристи з 14:00 до 15:00?
4) Скільки кілометрів становить дальність подорожі, якщо середня витрата пального автомобіля становить 8 л на 100 км?

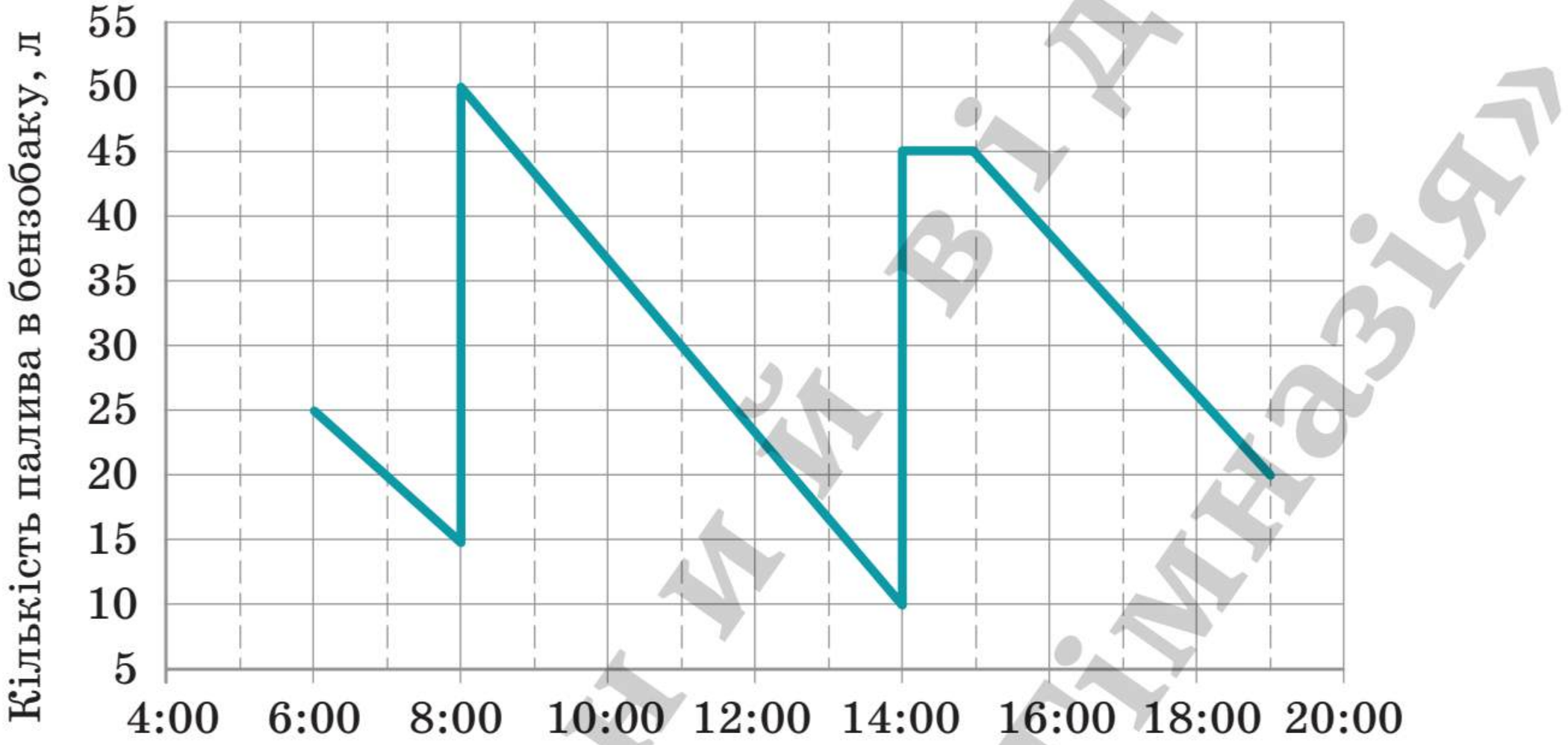


Рис. 6

Якщо вам сподобалися задачі 158–161, то радимо створити групу з ваших однокласників і однокласниць для роботи над проєктом, у якому ви зможете навчитися «читати» графіки змін значень деякої величини, а також набути досвіду, який дозволить коректно інтерпретувати інформацію, подану графічно (див. задачу 158).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

162. Із пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 192 км, зі швидкістю 60 км/год виїхав мотоцикліст. Через 30 хв назустріч йому з пункту B зі швидкістю 75 км/год виїхав другий мотоцикліст. Скільки часу їхав другий мотоцикліст до зустрічі з першим?

163. У двох бідонах разом міститься 80 л молока. Якщо з першого бідона перелити 20 % молока у другий бідон, то в обох бідонах молока стане порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

164. Василь і Поліна по черзі заміняють у рівнянні $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак * на деяке число. Першим заміну робить Василь. Поліна хоче отримати рівняння, яке має корінь. Чи може Василь їй завадити?

6. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій з раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1. Спростіть вираз

$$\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4}\right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Розв'язання. Даний вираз можна спростити аналогічно до того, як ми робили це, коли знаходили значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій. Виконуємо дії відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення і наприкінці — віднімання:

$$1)\ \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} = \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} =$$

$$= \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2)\ \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} =$$

$$= \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} = \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3)\ \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} =$$

$$= \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

Відповідь: a. ◀

Корпус Видавництво

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не окремими діями, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на прикладі.

ПРИКЛАД 2. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення a.

Розв'язання. Спростимо даний вираз:

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=$$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях a значення даного виразу дорівнює 3. ◀

ПРИКЛАД 3. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівності, що доводиться. Тут доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a(a-7)}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a(a-7)}=$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено. ◀

ПРИКЛАД 4. Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Розв'язання. Записавши даний вираз у вигляді частки від ділення чисельника на знаменник, отримаємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Комунальний вищий професійний навчальний заклад «Київський фаховий коледж видавничої індустрії»

Даний вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме: помножити його чисельник і знаменник на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

ВПРАВИ

165.° Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

166.° Спростіть вираз:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

Конспект видавництво Київський університет імені Бориса Грінченка

167.• Виконайте дії:

1) $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^2-4}{3a-3}-\dfrac{3}{a-2}$;

2) $\dfrac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\dfrac{b-3}{b+3}+\dfrac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{3c+1}{3c-1}-\dfrac{3c-1}{3c+1}\right):\dfrac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\dfrac{1}{4b^2-a^2}\right):\dfrac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\dfrac{a-8}{a^2-10a+25}-\dfrac{a}{a^2-25}\right):\dfrac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-2}{x^2+3x}\right):\dfrac{x^2+6}{x^3-9x}$.

168.• Виконайте дії:

1) $\dfrac{b+4}{b^2-6b+9}:\dfrac{b^2-16}{2b-6}-\dfrac{2}{b-4}$;

2) $\left(\dfrac{m-1}{m+1}-\dfrac{m+1}{m-1}\right):\dfrac{4m}{m^2-1}$;

3) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}:\left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\dfrac{2a-3}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-1}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-2}{a^3-4a}$.

169.• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\dfrac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\dfrac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\dfrac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{a}{b^2}\right)\cdot\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{2}{b-a}$;

4) $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right):\dfrac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}-\dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\dfrac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4}+\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{4}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ТЕРНОГРАЗІЯ»

170.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\dfrac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\dfrac{2c-9}{c+8}\right):\dfrac{c^2+3c}{c^2-64}+\dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{3+x}{3-x}\right):\dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4}+\dfrac{9y+6}{y^3-8}+\dfrac{1}{y-2}\right)\cdot\dfrac{y^2-4}{18}$.

171.• Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right):\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\dfrac{3}{36-c^2}+\dfrac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\dfrac{(c-6)^2}{2}+\dfrac{3c}{c+6}=2$.

172.• Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{a}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}=\dfrac{4}{a+b}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{b^2-a^2}\right)+\dfrac{3a+b}{a+b}=3$.

173.•• Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\left(\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}\right):\dfrac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\dfrac{a}{a^2-49}-\dfrac{1}{a+7}\right):\dfrac{7a}{a^2+14a+49}-\dfrac{2}{a-7}$?

174.•• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\dfrac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\dfrac{6x+1}{x-3}+\dfrac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{4a^2-12a+9}-\dfrac{3}{4a^2-9}\right)$.

Видавництво «Підручник і посібник»

175.$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-\dfrac{a^2}{a+1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\dfrac{6a-9}{a}}{1-\dfrac{3}{a}}$;

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$.

176.$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

177.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1$.

178.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ набуває додатних значень.

179.$^{\bullet\bullet}$ Підставте замість x даний вираз і спростіть отриманий вираз:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\dfrac{ab}{a+b}$;

2) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

180. Сім'я Петренків планує здійснити на своєму автомобілі подорож популярним туристичним маршрутом «Золота підкова Львівщини». Родина збирається виїхати зі Львова до Олеського замку, звідти послідовно відвідати Підгорецький, Золочівський та Свірзький замки, а потім

повернутися до Львова. Відстань від Львова до Олеського замку становить $\frac{15}{41}$ довжини запланованого маршруту, між Олеським і Підгорецьким замками — у 5 разів менша від відстані між Львовом і Олеським замком, між Підгорецьким і Золочівським замками — на 3 км більша за відстань між Олеським і Підгорецьким замками, між Золочівським і Свірзьким замками — у 3 рази більша за відстань між Підгорецьким і Золочівським замками, а відстань між Свірзьким замком і Львовом дорівнює 43 км. Скільки гривень має запланувати сім'я Петренків у бюджеті подорожі на покупку пального, якщо витрати бензину їхньої автівки складають 8,8 л на кожні 100 км шляху, а вартість 1 л бензину становить 60 грн?



Золочівський замок



Підгорецький замок

181. За 5 років, із 2017 по 2021 рр., середнє споживання в місяць картоплі громадянином / громадянкою України знизилося зі 6,4 кг до 5,8 кг. На скільки відсотків відбулося зниження споживання картоплі? Відповідь округліть до десятих.

↔ Пропонуємо вам створити групу з ваших однокласників і однокласниць для участі в проєкті з дослідження споживання п'яти найпоширеніших в Україні продуктів харчування. Установіть, як змінилося споживання відповідного продукту протягом останніх 10 років. У роботі над цим проєктом радимо звернутися по допомогу до вчителів / вчительок географії та біології.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

182. Доведіть, що значення виразу $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$ ділиться націло на 11.

НАЦІОНАЛЬНЕ ВИДАВНИЧЕ КОМПАНІЯ

183. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

184. На першому складі було буряку в 3 рази більше, ніж на другому. Коли з першого складу вивезли 400 кг буряку, то на ньому залишилося буряку у 2 рази менше, ніж було на другому. Скільки кілограмів буряку було на першому складі спочатку?

185. Куртка коштувала на 600 грн менше від костюма. Під час сезонного розпродажу куртка подешевшала на 10 %, а костюм — на 20 %, після чого куртку та костюм можна було придбати за 3030 грн. Якою була початкова ціна куртки та якою — ціна костюма?

186. З пункту A в пункт B автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертався з пункту B у пункт A зі швидкістю 70 км/год іншою дорогою, яка на 15 км коротша від першої. На зворотний шлях автомобіль витратив на 30 хв менше, ніж на шлях із пункту A у пункт B. За який час він доїхав із пункту A у пункт B?

187. (*З українського фольклору.*) За 30 монет купили 30 птахів. Скільки купили птахів кожного виду, якщо за трьох горобців платили одну монету, за двох голубів — теж одну монету, а за одну горлицю — дві монети, причому купили хоча б одну пташку кожного виду?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

188. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+7}{4} = \frac{x+5}{3}$;
2) $x^2 + 6x = 0$;
3) $0{,}21x - 0{,}7x^2 = 0$;
4) $x^2 - 16 = 0$;
5) $25x^2 - 36 = 0$;
6) $x^2 + 4 = 0$.

189. При якому значенні змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{6}{3x-9}$;
2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$;
3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$;
4) $\frac{8}{x+7} + \frac{4}{x-2}$;
5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;
6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

190. При якому значенні змінної значення дробу дорівнює нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$;
2) $\frac{x-2}{x+2}$;
3) $\frac{4}{x-5}$?

Копія видавництва «Ранок»



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

191. На дошці написано многочлени $x + 2$ і $2x + 1$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен $2x^3 + x + 5$?



КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Перша жінка, яка отримала докторський ступінь

Мало було в минулому жінок-учених, а ще менше — математикинь. Шлях жінок до науки був дуже важким. Проте деякі з них уперто продовжували всупереч традиціям займатися самоосвітою, боротися за здійснення своїх мрій.

Познайомимося з Еленою Лукрецією Корнаро Піскопія — першою жінкою у світі, яка стала студенткою університету й отримала ступінь доктора філософії. Враховуючи обставини життя в XVII столітті й обмежені можливості жінок у ті часи, це досягнення вражає своєю величчю.

Елена народилася 5 червня 1646 року у Венеції в знатній родині Джанбаттісти Корнаро Піскопії. Завдяки своєму походженню і багатству Елена отримала чудову всебічну освіту.

Можливо, вона не досягла б великих успіхів, якби не мала дивовижних здібностей. Їй легко давалися іноземні мови, вона почала вивчати їх у віці семи років і заслужила звання Oraculum Septilingue (семимовний оракул). Крім рідної мови вона вільно говорила латиною, грецькою, арабською, французькою, іспанською та івритом. Пізніше вивчала математику, філософію, теологію. Також дівчина захоплювалася музикою: грала на арфі, клавесині, клавікорді, скрипці, писала музику. У віці 20 років захопилася фізикою, астрономією та лінгвістикою.

Коли Елена вирішила підготувати дисертацію на здобуття ступеня доктора богослов'я в Падуанському університеті, про це дізнався місцевий єпископ і виступив проти цього лише тому, що вона жінка. Проте завдяки тиску з різних боків йому і місцевим богословам довелося піти на часткові

Київський видавничий центр «Академія»

поступки: Елені було дозволено претендувати на отримання докторського ступеня з філософії. Вона пройшла курс навчання в університеті, після чого 25 червня 1678 року предстала перед вченою радою в соборі Падуї. На іспиті були присутні представники університету, професори всіх факультетів, студенти, більшість сенаторів Венеції, а також багато гостей з університетів Болоньї, Перуджи, Рима і Неаполя. Жінка представила латиною дисертацію, присвячену непростим питанням, пов'язаним із працями Арістотеля. Її слухали з величезною увагою, і, коли вона закінчила, під оплески їй вручили всі атрибути: обручку, накидку з горностаєвого хутра і лавровий вінок, яким у давнину нагороджували поетів. Пізніше Елену було обрано членкинею багатьох європейських академій наук.

Наступні шість років Елена Корнаро присвятила науковій діяльності, викладанню математики в Падуанському університеті та благодійності, досягнувши в усіх цих сферах чималих успіхів.

Елена померла 26 липня 1684 року від туберкульозу і була похована в Падуї. У цьому місті на території університету на честь славетної жінки була встановлена статуя.

Завзятість, працьовитість, наполегливість, вміння досягати бажаної мети Елени Лукреції Корнаро Піскопія викликають повагу та захоплення і можуть слугувати зразком для всіх наступних поколінь.



Елена Лукреція Корнаро Піскопія
(1646–1684)

КОПІЯ ВИДАННЯ

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$;

Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

2. Виконайте множення: $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8\,(a-5b)$; Б) $8\,(a+5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

3. Спростіть вираз $\frac{b^2-6b+9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$.

А) $b+3$; Б) $b-3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

4. Виконайте ділення: $\frac{5a^6}{b^8} : (10a^3b^2)$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

5. Спростіть вираз $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12; Г) x.

6. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{n^2-3n}{64n^2-1} : \frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

Комунальний заклад «Харківська гімназія № 161 Харківської міської ради» Видавництво

7. Виконайте піднесення до степеня: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Якому числу при всіх допустимих значеннях a дорівнює значення виразу $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\frac{1}{2}$; Г) -2.

9. Чому дорівнює значення виразу $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, якщо $3a-5b=0{,}2(2a+b)$?

А) 4; Б) -4; В) 3; Г) -3.

10. Відомо, що $x+\frac{1}{x}=6$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

11. Спростіть вираз $\frac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$;

Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А–Д).

Вираз	**Тотожно рівний вираз**
1) $\left(a-\frac{2a}{a+2}\right):\frac{a^2}{a^2+4a+4}$	А) $\frac{1}{a+2}$
2) $\left(\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}\right):\frac{4}{a-2}$	Б) $\frac{1}{a-2}$
3) $\left(a+\frac{2a}{a-2}\right):a^2$	В) $a+2$
	Г) $a-2$
	Д) $2-a$

Копія РСК у РС «Гімназія» видавництво

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° Виконайте дії:

1) $\dfrac{28m^4}{n^5}\cdot\dfrac{n^4}{21m^2}$;

2) $\dfrac{12x^6}{y^3}:(4x^3y^3)$;

3) $\dfrac{2a+2b}{b}\cdot\dfrac{5b}{a+b}$;

4) $\left(-\dfrac{3m^3}{n^6}\right)^3$.

2.° Спростіть вираз $\dfrac{5a}{a+3}-\dfrac{a-6}{2a+6}\cdot\dfrac{90}{a^2-6a}$.

3.• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a-5}{a+5}-\dfrac{a+5}{a-5}\right):\dfrac{4a}{25-a^2}$;

2) $\left(\dfrac{4m}{m+7}-\dfrac{9m}{m^2+14m+49}\right):\dfrac{4m^2+19m}{m^2-49}-\dfrac{7m+35}{m+7}$.

4.• Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{b^2}{a^3-ab^2}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{ab+b^2}\right)=\frac{b}{b-a}.$$

5.•• Відомо, що $x^2+\dfrac{25}{x^2}=59$. Знайдіть значення виразу $x-\dfrac{5}{x}$.

7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння

Розглянемо два рівняння: $x^2=4$ і $|x|=2$.

Кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

Говорять, що рівняння $x^2=4$ і $|x|=2$ **рівносильні**.

Наведемо ще приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x=0 \text{ і } 2x=0;$$

$$2x=4 \text{ і } 4x-8=0;$$

$$x^2=1 \text{ і } (x-1)(x+1)=0.$$

Розглянемо рівняння $x^2=-5$ і $|x|=-3$. Кожне із цих рівнянь не має коренів. Такі рівняння також прийнято вважати рівносильними.

НУШ Робочий зошит Видавництво «Ранок»

Означення:

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.

Число 2 є коренем кожного з рівнянь $(x-2)(x+1)=0$ і $x-2=0$. Проте ці рівняння не є рівносильними, оскільки перше рівняння має ще один корінь, що дорівнює -1, який не є коренем другого рівняння.

У 7 класі ви вивчили властивості рівнянь з однією змінною. Тепер, використовуючи поняття «рівносильні рівняння», ці властивості можна сформулювати так.

- ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Розглянемо таку задачу. Автомобіль, проїхавши 180 км шляху, збільшив швидкість на 10 км/год і решту 210 км проїхав за той самий час, що й першу частину шляху. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

Нехай x км/год — шукана швидкість. Тоді швидкість автомобіля на другій частині шляху дорівнює $(x+10)$ км/год. Автомобіль подолав першу частину шляху за $\frac{180}{x}$ год, а другу — за $\frac{210}{x+10}$ год. Рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$ є математичною моделлю розглянутої реальної ситуації. Обидві частини отриманого рівняння є раціональними виразами.

Означення:

Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.

З означення випливає, що, розв'язуючи задачу, ми отримали раціональне рівняння.

Зауважимо, що лінійне рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, є раціональним.

Розглянемо раціональне рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де A і B — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому, щоб розв'язати рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, треба вимагати *одночасного* виконання двох умов: $A = 0$ і $B \neq 0$. Це означає, що під час розв'язування рівнянь указаного виду слід керуватися таким алгоритмом:

- розв'язати рівняння $A = 0$;
- перевірити, які зі знайдених коренів задовольняють умову $B \neq 0$;
- корені, які задовольняють умову $B \neq 0$, включити до відповіді.

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$.

Розв'язання. Прирівняємо чисельник дробу, який стоїть у лівій частині рівняння, до нуля. Маємо: $(x-1)(x+1) = 0$. Коренями цього рівняння є числа -1 і 1.

Перевіримо, чи задовольняють ці корені умову

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

При $x = -1$ отримуємо, що $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

При $x = 1$ отримуємо, що $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Отже, число -1 є коренем заданого рівняння, а число 1 — ні.

Відповідь: -1. ◀

Як ми вже зазначали вище, розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$ зводиться до розв'язування рівняння $A = 0$ та перевірки умови $B \neq 0$. Говорять, що рівняння $\frac{A}{B} = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)=0,\\ x^2-4x+3\neq 0.\end{cases}$$

Як ми з'ясували, розв'язком цієї системи є число -1.

Завершимо розв'язування задачі про автомобіль. Маємо:

$$\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння $\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0$.

Звідси

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;\quad \frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}1800-30x=0,\\ x(x+10)\neq 0.\end{cases}$$

Коренем рівняння, яке входить до системи, є число 60; очевидно, що воно задовольняє умову $x(x+10)\neq 0$.

Відповідь: 60 км/год.

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{A}{B}=0$. Саме так ми зробили, розв'язуючи рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=0$.

Подавши ліву частину цього рівняння у вигляді раціонального дробу, отримаємо:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}4x-2=0,\\ 3(2x-1)(2x+1)\neq 0.\end{cases}$$

Перепишемо цю систему так: $\begin{cases}4x-2=0,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}x=0{,}5,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Видавництво «Ранок»

Отже, дане рівняння не має коренів.
Відповідь: коренів немає. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2x^2-4x-16}{x-4}-x=0.$

Розв'язання. Подамо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4}=0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-16=0, \\ x-4\neq 0, \end{cases}$$

звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x=4 \text{ або } x=-4, \\ x\neq 4; \end{cases}$$

$$x=-4.$$

Відповідь: -4. ◀

Розглянемо задачу, у якій раціональне рівняння є математичною моделлю реальної ситуації.

ПРИКЛАД 4. Туристка проплила на човні 3 км за течією річки та 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання. Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює x км/год. Тоді його швидкість за течією річки становить $(x+2)$ км/год, а проти течії — $(x-2)$ км/год. Туристка проплила 3 км за течією за $\dfrac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\dfrac{2}{x-2}$ год. Оскільки весь шлях було пройдено за $30\text{ хв}=\dfrac{1}{2}$ год, то $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{2}.$

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4}-\frac{1}{2}=0;$$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

$$\frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)}=0;$$

$$\frac{10x-x^2}{2(x^2-4)}=0;$$

$$\begin{cases}10x-x^2=0,\\2(x^2-4)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(10-x)=0,\\x\neq 2,\\x\neq -2;\end{cases}$$

$x=0$ або $x=10$.

Корінь $x=0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.

Відповідь: 10 км/год. ◀

1. Які два рівняння називають рівносильними? **2.** За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному? **3.** Яке рівняння називають раціональним? **4.** Сформулюйте умову, за якої дріб дорівнює нулю. **5.** Опишіть алгоритм розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B}=0$, де A і B — многочлени.

ВПРАВИ

192.° Проведіть у класі обговорення, чи є рівносильними рівняння:

1) $x+2=10$ і $3x=24$;

2) $-2x=-6$ і $\frac{1}{3}x=1$;

3) $x-5=0$ і $x(x-5)=0$;

4) $(3x-12)(x+2)=0$ і $(0{,}4-0{,}1x)(7x+14)=0$;

5) $\frac{6}{x}=0$ і $x^2=-4$;

6) $x+1=1+x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$?

Обґрунтуйте ваші висновки.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

193.° Складіть рівняння, рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

Порівняйте ваші рівняння з тими, які склали однокласники й однокласниці.

194.° Чи є рівносильними рівняння та система:

1) $\frac{x+5}{x-3} = 0$ і $\begin{cases} x+5 \neq 0, \\ x-3 = 0; \end{cases}$ 3) $\frac{x^2-x}{x+1} = 0$ і $\begin{cases} x^2-x = 0, \\ x+1 \neq 0; \end{cases}$

2) $\frac{x+5}{x-3} = 0$ і $\begin{cases} x+5 = 0, \\ x-3 \neq 0; \end{cases}$ 4) $\frac{x^2-x}{x+1} = 0$ і $\begin{cases} x+1 = 0, \\ x^2-x \neq 0? \end{cases}$

195.° Запишіть систему, рівносильну рівнянню:

1) $\frac{x-8}{x-9} = 0$; 2) $\frac{x+4}{x^2-16} = 0$; 3) $\frac{x^2+10x+25}{x-7} = 0$.

196.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-6}{x-4} = 0$;

2) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$;

4) $\frac{x-2}{x-2} = 1$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9} = 2$;

6) $\frac{x}{x-5} + \frac{2x-9}{x-5} = 0$;

7) $\frac{5x-7}{x+1} - \frac{x-5}{x+1} = 0$;

8) $\frac{2x+16}{x+3} - \frac{1-3x}{x+3} = 0$;

9) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0$;

10) $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+3}$;

11) $\frac{x}{x-6} = 2$;

12) $\frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+1}{2x-1}$;

13) $\frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0$;

14) $\frac{2x}{x-5} - \frac{x^2+15x}{x^2-25} = 0$.

197.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 0$;

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$;

3) $\frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0$;

4) $\frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0$;

5) $\frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0$;

6) $\frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2+6x} = 0$;

7) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1} - x = 1$;

8) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1$.

Комунальний заклад «Видавництво «Ім'я»

198.° Яке число треба відняти від чисельника та знаменника дробу $\frac{15}{19}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$?

199.° Яке число треба додати до чисельника та знаменника дробу $\frac{25}{32}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{5}{6}$?

200.• Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

Порівняйте ваші рівняння з тими, які склали однокласники й однокласниці.

201.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2$;
2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1}$;
3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3}$;
4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1}$;
5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2}$;
6) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4$.

202.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2}$;
2) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;
3) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;
4) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

203.• Моторний човен проплив 8 км за течією річки й повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 18 км/год.

204.• Теплохід пройшов 28 км проти течії річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

205.• Човен проплив 6 км проти течії річки та 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

206.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x-5}{2x^2+10x}=\dfrac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x^2+4x+16}$.

207.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{4y+24}{5y^2-45}+\dfrac{y+3}{5y^2-15y}=\dfrac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\dfrac{y+2}{8y^3+1}-\dfrac{1}{4y+2}=\dfrac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

208.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\dfrac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\dfrac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\dfrac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

209.* При яких значеннях a рівняння $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ не має коренів?

210.* При яких значеннях a рівняння $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ має один корінь?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

211. Під час оплати послуг через платіжний термінал стягується комісія в розмірі 3 %. Термінал приймає суми, кратні 20 грн. Ярина хоче поповнити рахунок свого мобільного телефону щонайменше на 175 грн. Яку найменшу суму грошей вона має заплатити через цей термінал? Які ще способи поповнення рахунку свого мобільного телефону ви знаєте? Який спосіб ви вважаєте найбільш вигідним? Поцікавтесь у ваших однокласників і однокласниць, які способи оплати вони вважають оптимальними.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. На кінець року населення міста становило 72 100 осіб. Визначте кількість мешканців і мешканок у цьому

місті на початок року, якщо приріст населення за цей час становив 3 %.

213. Доведіть, що при будь-яких значеннях змінних даний вираз набуває невід'ємного значення:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

214. Знайдіть значення функції $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,2?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

215. Знайдіть значення виразу:

1) 4^3+3^4;

2) $(-8)^2-(-1)^{12}$;

3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;

4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

216. Не виконуючи обчислень, порівняйте значення виразів:

1) $(-5{,}7)^2$ і 0;

2) 0 і $(-6{,}9)^3$;

3) $(-23)^5$ і $(-2)^4$;

4) -8^8 і $(-8)^8$.

217. Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) з основою 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

218. Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a=-\frac{1}{6}$;

2) $(18a)^2$, якщо $a=-\frac{1}{6}$;

3) $6+b^4$, якщо $b=-2$;

4) $(6+b)^4$, якщо $b=-2$.

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 5 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

219. Чи існує натуральне число, яке при множенні на 2 дає в результаті квадрат натурального числа, а при множенні на 3 — куб натурального числа?

8. Степінь із цілим від'ємним показником

Часто для запису великих чисел у компактному вигляді використовують степінь з натуральним показником. Наприклад,

$$129\,140\,163 = 3^{17},$$
$$282\,475\,249 = 7^{10}.$$

У науці та практиці для короткого запису великих значень величин часто використовують степінь числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Полярної зорі приблизно дорівнює 4 470 000 000 000 км, або $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Маса Сонця дорівнює 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 кг, або $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Це були приклади з макросвіту, тобто світу дуже великих фізичних величин. Наведемо приклади з мікросвіту, тобто світу дуже малих фізичних величин.

Маса атома Гідроґену дорівнює

$$0{,}00000000000000000000001661 \text{ кг}.$$

Радіус атома Оксиґену дорівнює

$$0{,}0000000066 \text{ см}.$$

Для запису цих величин так само можна використовувати степінь числа 10. Маємо:

$$0{,}00000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Проте якщо домовитися позначити $\frac{1}{10^{27}}$ і $\frac{1}{10^{9}}$ відповідно 10^{-27} і 10^{-9}, то для розглянутих величин отримаємо «одноповерхову» форму запису:

$$\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27},$$

$$\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

Аналогічно можна домовитися, що, наприклад, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Означення:

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, і натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

З означення випливає, що, наприклад,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\ (-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16,\ (0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}.$$

Отже, ми можемо підносити число до будь-якого цілого степеня, крім нуля. Заповнимо цю прогалину.

Означення:

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.

Наприклад, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Вираз 0^n при цілих n, які менші від нуля або дорівнюють нулю, не має змісту.

З наведених означень випливає, що при будь-якому $a \neq 0$ та цілому n числа a^n і a^{-n} є взаємно оберненими. Тому рівність

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

виконується при будь-якому цілому n.

Наприклад, при $n = -2$ маємо: $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію: «Маса Венери дорівнює $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3{,}8 \cdot 10^7$ км^2». Числа, що виражають ці величини, записано в так званому **стандартному вигляді.**

Київ і Ві Академія»

Означення:

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a\cdot 10^n$, де $1\leqslant a<10$ і n — ціле число.

Число n називають **порядком** числа, записаного у стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, що виражає масу атома Гідроґену в кілограмах, дорівнює -27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171{,}25 = 1{,}7125\cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58\cdot 10^{-3}$. Проте на практиці стандартний вигляд числа зазвичай використовують для запису великих і малих значень величин. При цьому порядок числа дає уявлення про величину. Наприклад, якщо порядок числа m дорівнює 3, тобто $m = a\cdot 10^3$, то з урахуванням того, що $1\leqslant a<10$, отримуємо: $10^3\leqslant m<10^4$.

ПРИКЛАД 1. Знайдіть значення виразу: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3}\cdot 15+6^{-2}\cdot 8-4{,}3^0$.

Розв'язання. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}$.

І взагалі, якщо $a\neq 0$ і $b\neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2}=\left(\frac{12}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{25}{36}$.

3) $3^{-3}\cdot 15+6^{-2}\cdot 8-4{,}3^0=\frac{1}{3^3}\cdot 15+\frac{1}{6^2}\cdot 8-1=\frac{1}{27}\cdot 15+\frac{1}{36}\cdot 8-1=$

$=\frac{5}{9}+\frac{2}{9}-1=-\frac{2}{9}$. ◀

ПРИКЛАД 2. Подайте вираз $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.

Розв'язання.

$$(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2} = \frac{b+a}{a^2b^2(b-a)} = \frac{b+a}{a^2b^3 - a^3b^2}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3. Запишіть у стандартному вигляді число:
1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Розв'язання. 1) $564\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 100\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 10^8$.

2) $0{,}0036 = 3{,}6 \cdot 0{,}001 = 3{,}6 \cdot \frac{1}{1000} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$. ◀

1. Чому дорівнює a^{-n} для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і натурального числа n? **2.** Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа? **3.** Що називають стандартним виглядом числа? **4.** Як у записі числа в стандартному вигляді $a \cdot 10^n$ називають число n?

ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Складні слова з першою іншомовною частиною, що вказує на вищий за звичайний, дуже високий або слабкий, швидкий вияв чого-небудь (**архи-, архі-, бліц-, гіпер-, екстра-, макро-, максі-, міді-, мікро-, міні-, мульти-, нано-, полі-, преміум-, супер-, топ-, ультра-, флеш-**) пишемо разом: *бліцтурнір*, *макровсесвіт*, *мікропроцесор*, *мінідиск*, *наносекунда*, *ультразвук*.

ВПРАВИ

220.° Якому з виразів дорівнює вираз a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

221.° Подайте степінь у вигляді дробу:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

222.° Замініть степінь дробом:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

223.° Подайте дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

Копія видавництва

224.° Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником або добутком степенів:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

225.° Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

226.° Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

227.° Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

228.° Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

229.° Обчисліть:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

230.° Знайдіть значення виразу:

1) 20^{-2}; 2) $0{,}3^{-1}$; 3) $(-6)^{-3}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

231.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 4) $9\cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2{,}3)^0-5^{-2}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$.

232.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2}+2^{-1}$; 3) $0{,}03^0+0{,}7^0$;

2) $3^{-2}-6^{-1}$; 4) $(9\cdot 3^{-3}-12^{-1})^{-1}$?

233.° Яке з даних чисел записане у стандартному вигляді:

1) $12\cdot 10^4$; 2) $1{,}2\cdot 10^4$; 3) $0{,}12\cdot 10^4$?

Київський видавничий центр «Академія»

234.° Запишіть число у стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86\cdot10^3$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23\cdot10^4$;
3) 0,0046; 6) $250\cdot10^2$; 9) $9300\cdot10^5$.

235.° Запишіть числові значення величин у стандартному вигляді:

1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
3) площа України становить 603 700 км^2;
4) відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм;
7) маса пташки колібрі дорівнює 0,0017 кг;
8) товщина плівки мильної бульбашки дорівнює 0,0000000006 м.

Зверніться за порадою до вчителів / вчительок хімії, фізики та біології, щоб розширити список величин, числові значення яких зручно записувати в стандартному вигляді.

236.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа: 1) 45 000; 2) 260; 3) 0,00024; 4) 0,032; 5) $0{,}059\cdot10^8$; 6) $526\cdot10^4$.

237.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

1) $1{,}6\cdot10^3$; 2) $5{,}7\cdot10^6$; 3) $2{,}1\cdot10^{-2}$; 4) $1{,}1\cdot10^{-5}$.

238.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

1) $2{,}4\cdot10^2$; 2) $4{,}8\cdot10^5$; 3) $1{,}4\cdot10^{-3}$; 4) $8{,}6\cdot10^{-4}$.

239.• Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

240.• Знайдіть значення виразу:

1) $7\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}+2\cdot10^{-5}$;
2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot10^{-1}+9^0-(-2)^3+\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\cdot(-1{,}5)^{-3}$.

241.• Знайдіть значення виразу:

1) $4\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}+9\cdot10^{-4}$;
2) $(2{,}5)^{-2}-(8^5)^0+\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}+0{,}1^{-1}$.

Комунальне видавництво

242.• Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

2) 4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}.

243.• Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2$ **Н**, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ **З**, 3^{-1} **Ь**,

3^{-3} **А**, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **І**, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ **Є**.

Букви, що відповідають даним виразам, утворюють прізвище видатної італійської математикині, філософки і філантропки. Знайдіть в інтернеті інформацію про її життя, наукову та благодійну діяльність.



244.• Порівняйте значення виразів:

1) 12^0 і $(-6)^0$;

2) $0{,}2^3$ і $0{,}2^{-3}$;

3) 4^6 і $0{,}25^{-6}$;

4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ і 21^{-1};

5) $5^{-1} - 7^{-1}$ і 2^{-1};

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

245.• Порівняйте значення виразів:

1) 3^{-2} і $(-3)^0$;

2) $3^{-1} + 2^{-1}$ і 5^{-1};

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

246.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;

2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;

3) $m^2n^2\,(m^{-3} - n^{-3})$;

4) $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;

5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c+d)$;

6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

247.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;

2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;

3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c-d)^{-2}$;

4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

Київський видавничий центр

248. Наносекунда — це одна мільярдна доля секунди. Мікропроцесору персонального комп'ютера потрібно в середньому 3 наносекунди, щоб виконати одну команду. Виразіть цю величину в секундах і запишіть відповідь у стандартному вигляді.

249. Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

250. Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

251. Яке число більше:

1) $9{,}7\cdot10^{11}$ або $1{,}2\cdot10^{12}$;
2) $3{,}6\cdot10^{-5}$ або $4{,}8\cdot10^{-6}$;
3) $2{,}34\cdot10^{6}$ або $0{,}23\cdot10^{7}$;
4) $42{,}7\cdot10^{-9}$ або $0{,}072\cdot10^{-7}$?

252. Яке число менше:

1) $6{,}1\cdot10^{19}$ або $6{,}15\cdot10^{18}$;
2) $1{,}5\cdot10^{-9}$ або $0{,}9\cdot10^{-8}$?

253. У таблиці наведено відстані від Сонця до планет Сонячної системи.

Планета	Відстань, км
Венера	$1{,}082\cdot10^{8}$
Земля	$1{,}495\cdot10^{8}$
Марс	$2{,}280\cdot10^{8}$
Меркурій	$5{,}790\cdot10^{7}$
Нептун	$4{,}497\cdot10^{9}$
Сатурн	$1{,}427\cdot10^{9}$
Уран	$2{,}871\cdot10^{9}$
Юпітер	$7{,}781\cdot10^{8}$

1) Яка планета розташована на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
2) Яка з планет, Марс або Сатурн, розташована далі від Сонця?
3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані від них до Сонця, виражені у мільйонах кілометрів.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

254.° У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

Елемент	Маса атома, кг	Елемент	Маса атома, кг
Нітроґен	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Аурум	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Алюміній	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Купрум	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Гідроґен	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	Натрій	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Гелій	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Станум	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Ферум	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
2) Маса атома якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їхніх атомів.

255.° У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу.

Речовина	Запаси, т	Речовина	Запаси, т
Алюміній	$1{,}1 \cdot 10^{9}$	Нікель	$6{,}8 \cdot 10^{7}$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^{6}$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^{6}$
Залізо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^{5}$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	Фосфати	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Марганець	$6{,}35 \cdot 10^{8}$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^{9}$
Мідь	$2{,}8 \cdot 10^{9}$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^{8}$

1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їхніх запасів.

Комунальне видавництво

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

256. Маса чавунної болванки — 16 кг. Яка найменша кількість болванок потрібна, щоб відлити 41 деталь масою 12 кг кожна?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

257. У деякому місті на сьогоднішній день проживає 88 200 осіб. Скільки мешканців і мешканок проживало в цьому місті 2 роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

258. Дмитро ходить з дому до стадіону пішки зі швидкістю 4 км/год. Якщо він поїде до стадіону на велосипеді зі швидкістю 12 км/год, то приїде до нього на 20 хв раніше, ніж зазвичай. На якій відстані від дому Дмитра розташований стадіон?

259. Спростіть вираз

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

260. Чи можна стверджувати, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратне 42?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

261. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^7\cdot a^5$; 2) $a^7:a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\dfrac{(a^3)^6\cdot a^4}{a^{16}}$.

262. Спростіть вираз:

1) $-4m^3n^5\cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

263. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3^{10}\cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^8$.

Радимо поновити у пам'яті зміст п. 6 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.

КОПІЯ РОЗРОБЛЕНА ВИДАВНИЦТВОМ «ІНДАЗІЯ»



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

264. У деякому будинку живуть тільки подружні пари з маленькими дітьми, причому в кожного хлопчика є сестра і хлопчиків більше, ніж дівчаток. Чи може дорослих бути більше, ніж дітей?

9. Властивості степеня із цілим показником



У 7 класі ви вивчали властивості степеня з натуральним показником. Вони залишаються справедливими й для степеня з будь-яким цілим показником.

Теорема 9.1:

Для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Теорема 9.2:

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Рівність (1) виражає **основну властивість степеня.** Доведемо її.

Для натуральних m і n цю рівність уже було доведено в курсі алгебри 7 класу.

Розглянемо тепер випадок, коли m і n — цілі від'ємні числа.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа, то $-m$ і $-n$ — натуральні числа. Тоді $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

КУПУЄМО ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Щоб завершити доведення основної властивості степеня, треба також розглянути такі випадки: один із показників степеня m або n від'ємний, а другий — додатний; один або обидва показники дорівнюють нулю. Розгляньте ці випадки самостійно.

Рівності (2) і (3) доводять аналогічно.

За допомогою властивості (1) доведемо таку теорему.

Теорема 9.3:

Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Доведення. Маємо:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \blacktriangleleft$$

За допомогою властивостей (2) і (3) доведемо таку теорему.

Теорема 9.4:

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Доведення. Маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \blacktriangleleft$$

Властивості (1)–(5) називають **властивостями степеня із цілим показником.**

ПРИКЛАД 1. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Розв'язання. 1) Застосувавши основну властивість степеня, отримуємо:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

Копія підручника видавництва «Ранок»

2) Використовуючи рівність $a^m : a^n = a^{m-n}$, отримуємо:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Застосувавши послідовно правила піднесення степеня до степеня (властивість (2)), множення і ділення степенів з однаковими основами (властивості (1) і (4)), отримуємо:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4\cdot(-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2. Знайдіть значення виразу:

$$1)\ (5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3};\quad 2)\ 16^{-9} \cdot 8^{12};\quad 3)\ \frac{6^{-3}}{18^{-3}};\quad 4)\ \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}.$$

Розв'язання. 1) Маємо: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

2) Подавши числа 16 і 8 у вигляді степенів з основою 2, отримуємо:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

3) Використовуючи правило піднесення дробу до степеня (властивість (5)), отримуємо: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27.$

4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3. Спростіть вираз:

$$1)\ 0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3;\quad 2)\ (a^{-2}+9)(a^{-2}-4) - (a^{-2}+6)(a^{-2}-6).$$

Розв'язання. 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 =$

$$= \left(0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0{,}2m^{-2}n^{-3}.$$

2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4) - (a^{-2}+6)(a^{-2}-6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}. \blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 4. Виконайте множення $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ і результат запишіть у стандартному вигляді.

Розв'язання. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) =$

$$= 23{,}8 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10^7. \blacktriangleleft$$

Київ Видавничий Дім Гімназія

Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

ВПРАВИ

265.° Подайте вираз у вигляді степеня з основою a або добутку степенів з різними основами:

1) $a^{-6} \cdot a^{9}$;
2) $a^{5} \cdot a^{-8}$;
3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$;
4) $a^{-2} : a^{6}$;
5) $a^{7} : a^{-3}$;
6) $a^{-3} : a^{-15}$;
7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;
8) $(a^{-5})^{4}$;
9) $(a^{-6})^{-8}$;
10) $(a^{2})^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^{3}$;
11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
12) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

266.° Розшифруйте прізвище видатної сучасної української математикині, професорки, докторки фізико-математичних наук, керівниці наукової школи «Змішані задачі математичної фізики». Номер прикладу відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

1) $a^{8} \cdot a^{-12}$;
2) $a^{-4} \cdot a^{10}$;
3) $a^{-6} : a^{-10}$;
4) $a^{5} : a^{8}$;
5) $(a^{-6})^{2}$;
6) $a^{-15} \cdot a^{7} : a^{-11}$;
7) $a^{-10} : a^{-5} : a$;
8) $(a^{-3})^{6} \cdot (a^{-4})^{-5}$;
9) $(a^{-8})^{3} : (a^{10})^{-1} \cdot (a^{-13})^{-2}$.



Відповідь	a^{4}	a^{-6}	a^{-3}	a^{3}	a^{12}	a^{6}	a^{2}	a^{-12}	a^{-4}
Буква	**Й**	**Л**	**С**	**Е**	**Д**	**А**	**Ь**	**Ф**	**В**

Знайдіть в інтернеті інформацію про наукову й освітянську діяльність цієї науковиці.

Копія у РЕПОЗИТОРІЙ видавництва «Ранок»

267.° Знайдіть значення виразу:

1) $9^5 \cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18} : 3^{-21}$;
4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$;
6) $\dfrac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

268.° Знайдіть значення виразу:

1) $6^{-9} \cdot 6^6$;
2) $7^{-16} : 7^{-18}$;
3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$;
4) $\dfrac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$;
5) $0{,}8^{-4} \cdot \left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
6) $\dfrac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

269.° Спростіть вираз:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$;
2) $\dfrac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^4$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$;
5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$;
6) $\dfrac{kp^{-6}}{k^4p^4}$;
7) $(c^{-6}d^2)^{-7}$;
8) $\dfrac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \dfrac{6}{7}a^7b^4$;
9) $0{,}2c^{-3}d^5 \cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$.

270.° Спростіть вираз:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\dfrac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\dfrac{3{,}6a^2b}{0{,}9a^3b^{-3}}$;
4) $0{,}8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$.

271.• Знайдіть значення виразу:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;
2) $27^{-2} : 9^{-4}$;
3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0{,}01^6$;
4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;
5) $25^{-4} : (0{,}2^{-3})^{-2}$;
6) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;
7) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;
8) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

272.• Знайдіть значення виразу:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;
2) $32^{-5} : 64^{-4}$;
3) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;

4) $8^{-2} : 0{,}5^4$; 5) $\dfrac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$; 6) $\dfrac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

273.• Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
2) $\dfrac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \dfrac{27n}{26m^2}$;
3) $\dfrac{18p^{-6}k^2}{7} : \dfrac{15k^{-2}}{p^6}$;
4) $-2{,}4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;
5) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0{,}1yz^{-4})^{-2}$;
6) $1\dfrac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\dfrac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;
7) $\left(-\dfrac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;
8) $\left(\dfrac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$.

274.• Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\dfrac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \dfrac{y^4}{5x^{-7}}$;
2) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$;
3) $3{,}6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;
4) $1\dfrac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\dfrac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;
5) $\left(\dfrac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$.

275.• Винесіть за дужки степінь з основою a та найменшим із даних показників:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

276.• Винесіть за дужки степінь з основою b і найменшим із даних показників:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

277.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $a^{-2} - 4$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
4) $a^{-3} + b^{-3}$;
5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

278.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

279.• Доведіть тотожність

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

Радимо працювати в парах: хтось у парі перетворює ліву частину даної рівності, а хтось — праву.

Київський видавничий центр «Академія»

280.• Спростіть вираз:

1) $(a^{-4}+3)(a^{-4}-3)-(a^{-4}+2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2}-n^{-2}}{m^{-1}+n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2}+y^{-2}}{3x^{-2}-3x^{-1}y^{-1}}-\dfrac{x^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5}+b^{-5}}{a^{-6}}:\dfrac{a^{-3}b^{-5}+a^{-8}}{a^{-4}}$.

281.• Спростіть вираз:

1) $(x^{-2}-1)^2-(x^{-2}-4)(x^{-2}+4)$;

2) $\dfrac{a^{-2}-10a^{-1}b^{-1}+25b^{-2}}{a^{-1}-5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2}+n^{-2}}{4m^{-3}+4m^{-1}n^{-2}}-\dfrac{m^{-1}}{m^{-2}+n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1}+3c^{-1}}{c^{-2}}\cdot\dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1}+3b^{-1}c^{-2}}$.

282.• Порядок числа a дорівнює -4. Визначте порядок числа:

1) $10a$; 3) $100a$; 5) $10\,000a$;

2) $0{,}1a$; 4) $0{,}001a$; 6) $1\,000\,000a$.

283.• Порядок числа b дорівнює 3. Визначте порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

284.• У сучасних смартфонах використовують процесори, у яких на площі 1 мм^2 розташовано 125 млн транзисторів. Скільки квадратних сантиметрів становить площа, яку займає один транзистор? Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

285.• У цифрових фотоапаратах роль фотоплівки відіграє матриця, яка складається зі світлочутливих елементів — пікселів. Фотоапарат має матрицю розміром 864 мм^2, на якій розмістилося 50 320 896 пікселів. Скільки квадратних міліметрів займає один піксель? Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

286.• Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(1{,}8\cdot10^4)\cdot(6\cdot10^3)$;

2) $(3\cdot10^6)\cdot(5{,}2\cdot10^{-9})$;

3) $\dfrac{5{,}4\cdot10^5}{9\cdot10^8}$;

4) $\dfrac{1{,}7\cdot10^{-6}}{3{,}4\cdot10^{-4}}$.

Видавництво «Ранок»

287.• Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(1{,}6\cdot10^{-5})\cdot(4\cdot10^{7})$;

2) $(5\cdot10^{-3})\cdot(1{,}8\cdot10^{-1})$;

3) $\dfrac{7\cdot10^{-4}}{1{,}4\cdot10^{-6}}$;

4) $\dfrac{6{,}4\cdot10^{3}}{8\cdot10^{-2}}$.

288.• Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}5\cdot10^{8}$ км, а швидкість світла — $3\cdot10^{8}$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця досягне Землі? Відповідь округліть до одиниць.

289.• Густина міді дорівнює $8{,}9\cdot10^{3}$ кг/м^3. Знайдіть масу мідної плитки, довжина якої $2{,}5\cdot10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а висота — 0,02 м.

290.• Маса Землі дорівнює $6\cdot10^{24}$ кг, а маса Місяця — $7{,}4\cdot10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.

291.•• Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\dfrac{b}{a^{2}}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

292.•• Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9}:\dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12}-\dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

293.•• Порядок числа a дорівнює -4, а порядок числа b дорівнює 3. Яким може бути порядок значення виразу:
1) ab; 2) $a+b$; 3) $a+10b$; 4) $10a+0{,}1b$?

294.•• Порядок числа m дорівнює 2, а порядок числа n дорівнює 4. Яким може бути порядок значення виразу:
1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

295. (*З болгарського фольклору.*) П'ятеро братів хотіли поділити 20 овець так, щоб кожен із них одержав непарну кількість овець. Чи можливо це?

296. Якщо лижниця рухатиметься зі швидкістю 10 км/год, то дістанеться до пункту призначення на 1 год пізніше за запланований час прибуття, а якщо рухатиметься зі швидкістю 15 км/год — то на 1 год раніше. З якою швидкістю вона має рухатися, щоби прибути до пункту призначення в запланований час?

297. Для відкачування води із затопленого приміщення було задіяно три насоси. Перший із них може відкачати всю воду за 12 год, другий — за 15 год, а третій — за 20 год. Спочатку протягом 3 год працювали перший і другий насоси, а потім підключили третій насос. За який час було відкачано всю воду?

298. Чи є правильним твердження, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ ділиться націло на 48?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

299. Знайдіть значення функції $y = -\dfrac{14}{x}$, якщо:
1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

300. Функцію задано формулою $y = \dfrac{x + 2}{x - 6}$. Яка область визначення даної функції? Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

301. Побудуйте графік функції $y = 2x - 1$. Чи проходить цей графік через точку: 1) A (30; 59); 2) B (−15; −29)?

302. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 2{,}7x - 8$ і $y = 1{,}2x + 7$.

Комунальний заклад Видавництво

303. Розв'яжіть графічно систему рівнянь

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=5. \end{cases}$

Радимо поновити у пам'яті зміст пп. 20–23, 26 із підручника «Алгебра. 7 клас» за посиланням або QR-кодом на с. 4.



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

304. Після закінчення тенісного турніру, який проводили за олімпійською системою (ті, хто програли, вибувають), виявилося, що тільки 32 учасниці виграли зустрічей більше, ніж програли. Скільки тенісисток брало участь у турнірі?

10. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік



У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з функціональною залежністю, за якої зі **збільшенням (зменшенням)** однієї величини в кілька разів друга величина **зменшується (збільшується)** в таку саму кількість разів. Таку залежність називають **оберненою пропорційністю.**

Розглянемо два приклади.

ПРИКЛАД 1. Нехай є 500 грн. Позначимо через x грн ціну 1 кг товару, а через y кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 500 грн.

Залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю: збільшення ціни x у кілька разів приводить до зменшення кількості товару y у стільки ж разів, і навпаки, зменшення ціни спричиняє збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, задана формулою $y=\frac{500}{x}$. ◀

ПРИКЛАД 2. Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см^2, а сторони — x см і y см. Тоді

$$y=\frac{18}{x}.$$

Збільшення (зменшення) знаменника x у кілька разів спричиняє зменшення (збільшення) величини y у стільки ж разів, тобто залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю. ◀

Видавництво «Ранок»

У розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

Означення:

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.

Оскільки у виразі $\frac{k}{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі числа, крім 0, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ також є всі числа, крім 0.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-6	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	1	$1{,}5$	2	3	4	6
y	-1	$-1{,}5$	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	$1{,}5$	1

Позначимо на координатній площині точки, координати $(x; y)$ яких наведено в таблиці (рис. 7).

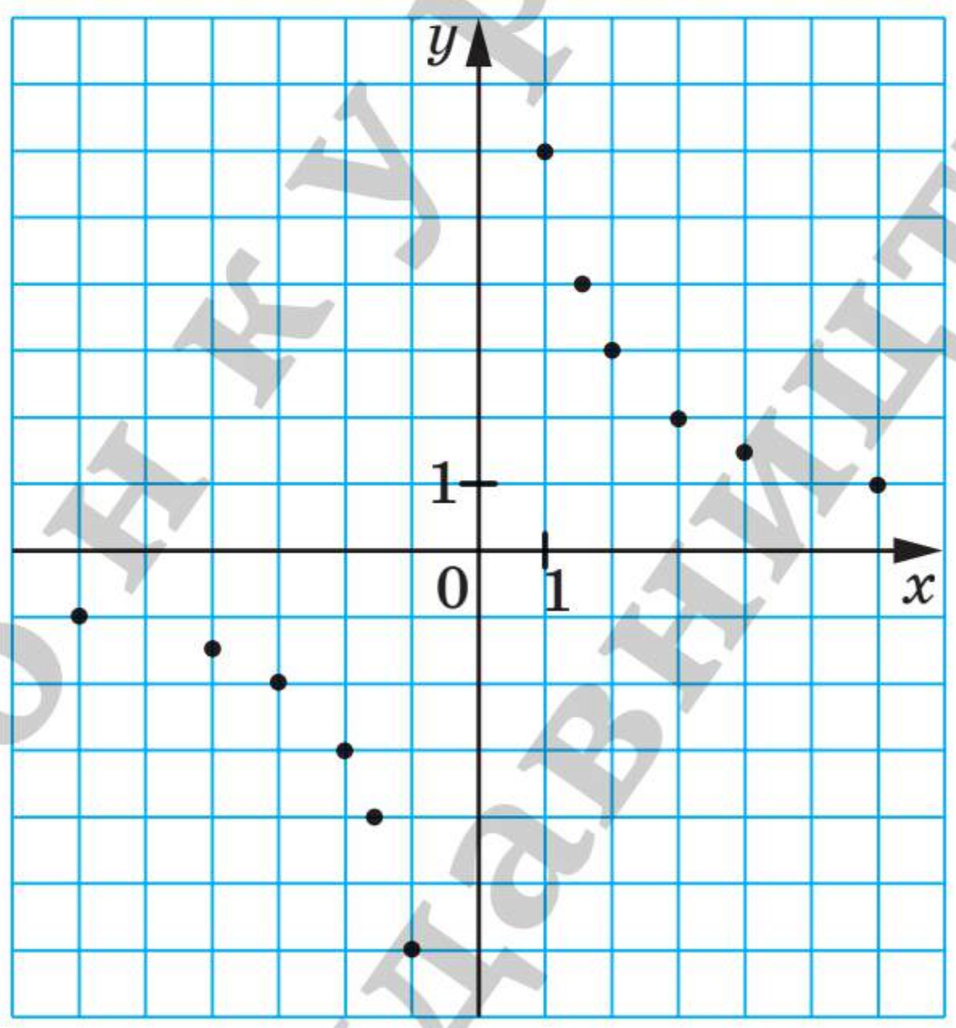


Рис. 7

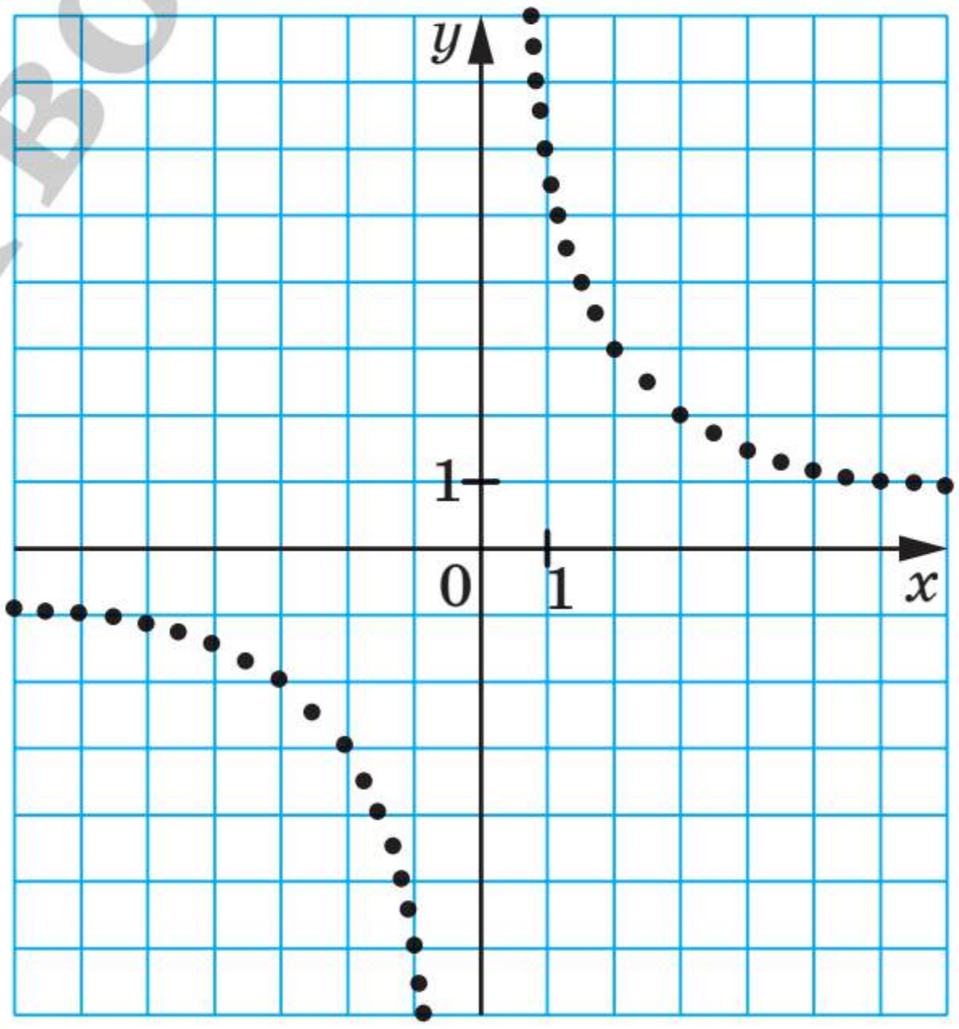


Рис. 8

ЖА1 [1]

[1] Урок із побудови графіків функції ви знайдете в електронному додатку до цього пункту.

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y=\frac{6}{x}$, нам удасться позначити, тим менше отримана фігура (рис. 8) відрізнятиметься від графіка функції $y=\frac{6}{x}$.

Серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y=\frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, цей графік не має спільних точок і з віссю абсцис, тобто точок, ординати яких дорівнюють нулю. Справді, рівняння $\frac{6}{x}=0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Якщо $x>0$, то $\frac{6}{x}>0$, тобто $y>0$; якщо $x<0$, то $y<0$. Отже, точки графіка даної функції можуть розміщуватися тільки в I і III координатних чвертях.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля абсциси відстані від точок графіка функції $y=\frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшуються та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Справді, чим більший модуль аргументу, тим менший модуль відповідного значення функції.

Аналогічно можна встановити, що зі зменшенням модуля абсциси відстані від точок графіка до осі ординат зменшуються та можуть стати як завгодно малими, проте ніколи не дорівнюватимуть нулю.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y=\frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 9.

Фігуру, яка є графіком функції $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$, називають **гіперболою.** Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи.**

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0=\frac{k}{x_0}$, то також є правильною рівність $-y_0=\frac{k}{-x_0}$. Тоді можна зробити

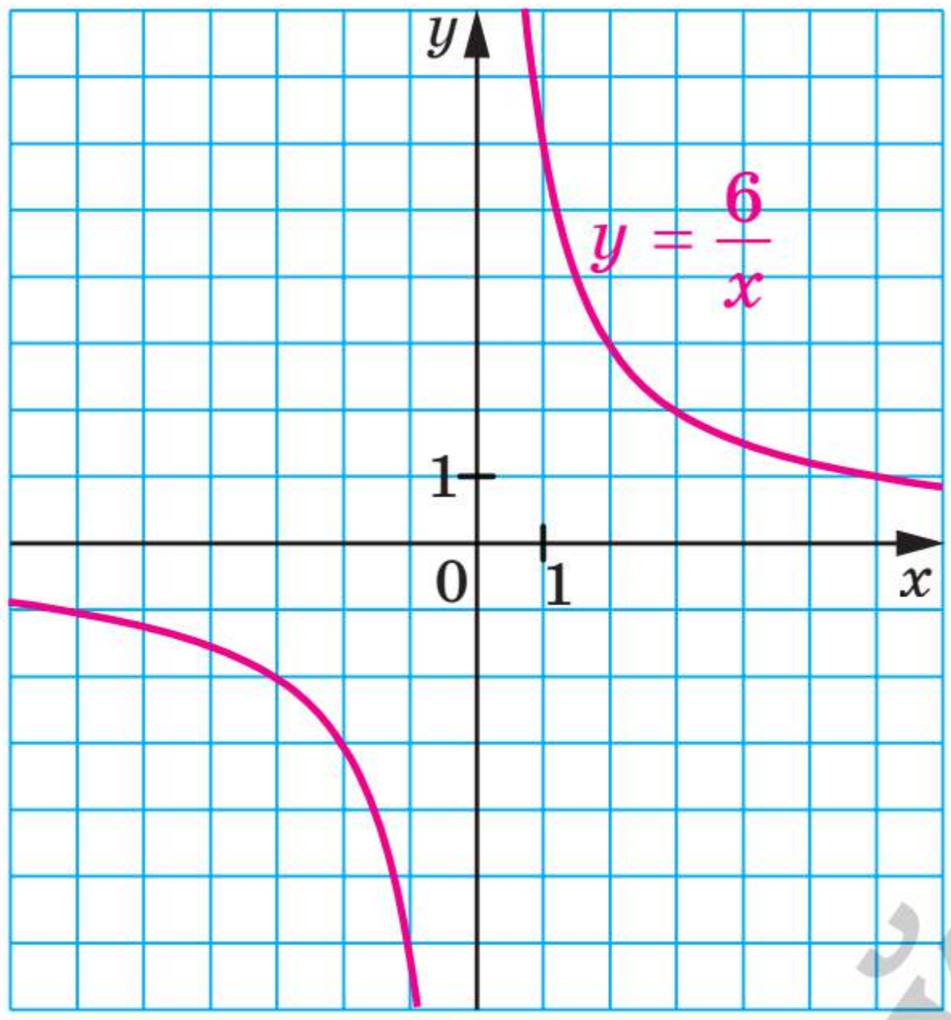


Рис. 9

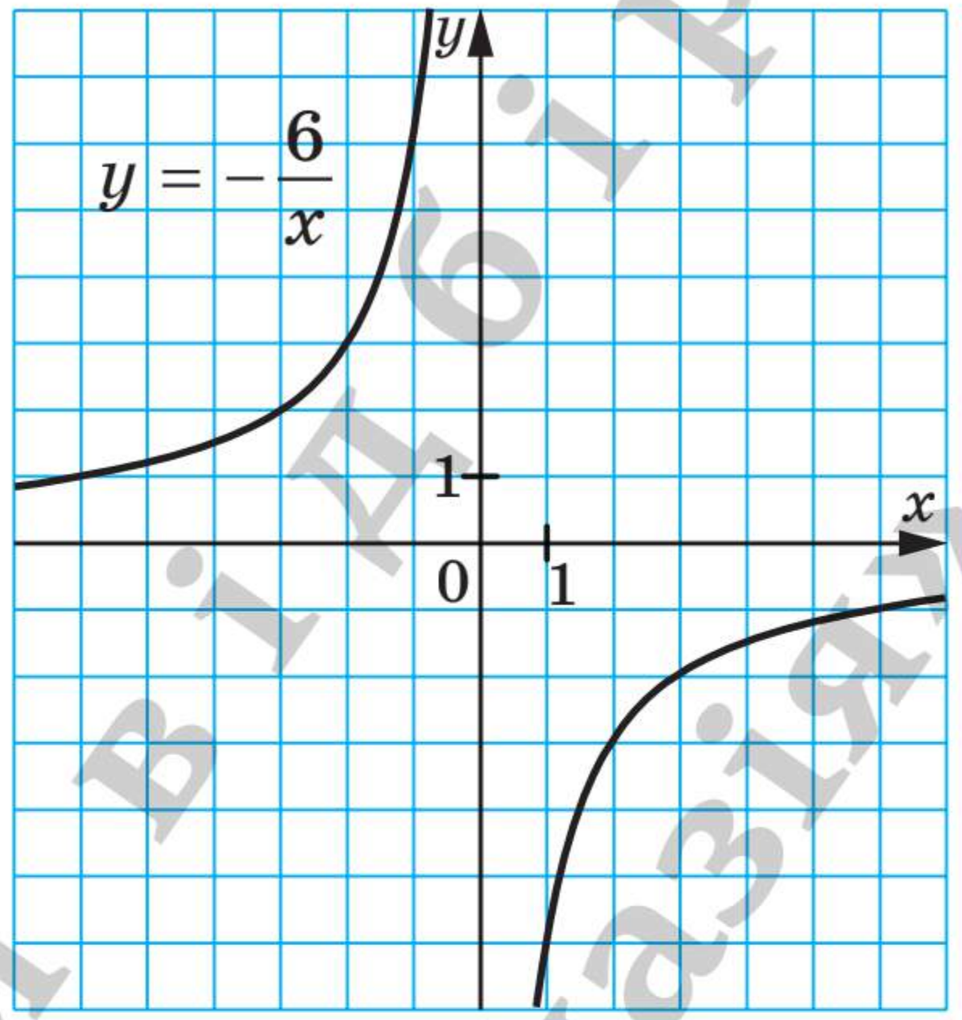


Рис. 10

такий висновок: якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B\ (-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ — то в II і IV чвертях.

На рисунку 10 зображено графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Вітки гіперболи $y = -\frac{6}{x}$ розміщені в II і IV чвертях.

Зауважимо, що областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, є всі числа, крім 0.

У таблиці наведено властивості функції $y = \frac{k}{x}$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	Усі числа, крім 0
Область значень	Усі числа, крім 0
Графік	Гіпербола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	Не існує

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ТАЛАНТ» ДЛЯ ВІЛЬНОЇ ОСВІТИ

Властивість графіка	Якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B\ (-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

Покажемо, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати під час розв'язування рівнянь.

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

Розв'язання. Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 11). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і -4.

У кожній із точок перетину графіків значення функції $y = \frac{4}{x}$ дорівнює значенню функції $y = x + 3$. Отже, при знайдених абсцисах значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і -4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$. Перевірка це підтверджує.

Справді, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ і $\frac{4}{-4} = -4 + 3$. ◀

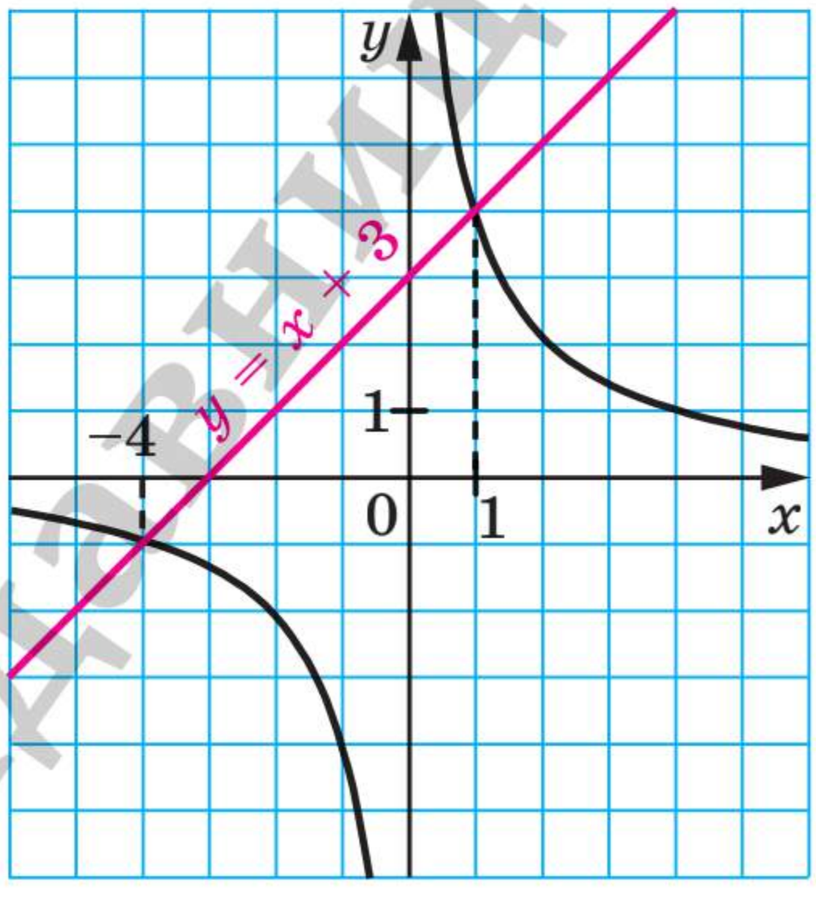


Рис. 11

КОНСПЕКТ УРОКІВ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Описаний метод розв'язування рівнянь називають **графічним**. У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знаєте, що цей метод не завжди дає точні результати. Тому перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння.

У подальшому (п. 22) ви навчитеся розв'язувати такі рівняння, не використовуючи графічний метод.

1. Поясніть, яку залежність між величинами називають оберненою пропорційністю. **2.** Яку функцію називають оберненою пропорційністю? **3.** Що є областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$? **4.** Як називають фігуру, що є графіком оберненої пропорційності? **5.** Як називають частини, з яких складається гіпербола? **6.** Що є областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$? **7.** У яких координатних чвертях розміщений графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$? якщо $k < 0$? **8.** Поясніть, у чому полягає графічний метод розв'язування рівнянь.

ВПРАВИ

305.° Автомобіль проїжджає деяку відстань за 10 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо його швидкість:
1) збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться в 1,2 раза?

306.° Довжина прямокутника дорівнює 30 см. Якою стане його довжина, якщо при тій самій площі ширину прямокутника:
1) збільшити в 1,5 раза; 2) зменшити в 3,2 раза?

307.° За деяку суму грошей купили 40 м тканини. Скільки метрів тканини купили б за ту саму суму грошей, якби ціна за 1 м:
1) зменшилась у 2,6 раза; 2) збільшилася в 1,6 раза?

308.° Туристка пройшла 12 км. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано швидкість, а в другому — час руху.

v, км/год	5		2,4	
t, год		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулою залежність t від v.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

309.° Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 48 см^3. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано площу його основи, а в другому — висоту.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулою залежність h від S.

310.° Бригада із семи робітників з однаковою продуктивністю праці може виконати певне виробниче завдання за 12 днів. Скільки потрібно робітників з такою самою продуктивністю праці, щоб виконати це завдання за 4 дні?

311.° Заготовлених кормів вистачить для 24 коней на 18 днів. На скільки днів вистачить цих кормів для 36 коней?

312.° Серед даних функцій укажіть обернені пропорційності:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

На чому ґрунтується ваш вибір? Обговоріть ваші відповіді з однокласниками й однокласницями.

313.° Задано функцію $y = \frac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -3; 6; 0,2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 12; -6; 100.

314.° Задано функцію $y = -\frac{36}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4; 0,9; 18;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 6; $-0,3$; 8.

315.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4, -1;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2, -8;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

316.° Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2, −10;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 5, −2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

317.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{28}{x}$, визначте, чи проходить графік через точку:

1) $A\,(-4; -7)$; 2) $B\,(14; -2)$; 3) $C\,(0{,}5; 14)$; 4) $D\,(0{,}2; 140)$.

318.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{48}{x}$, визначте, чи проходить графік через точку:

1) $A\,(-6; -8)$;
2) $B\,(12; -4)$;
3) $C\,(0{,}3; -16)$;
4) $D\,(0{,}4; -120)$.

319.• На рисунку 12 зображено графік залежності часу t руху з пункту A до пункту B від швидкості v руху. Користуючись графіком, визначте:

1) за який час можна дістатися з пункту A до пункту B, якщо рухатися зі швидкістю 8 км/год; 24 км/год;

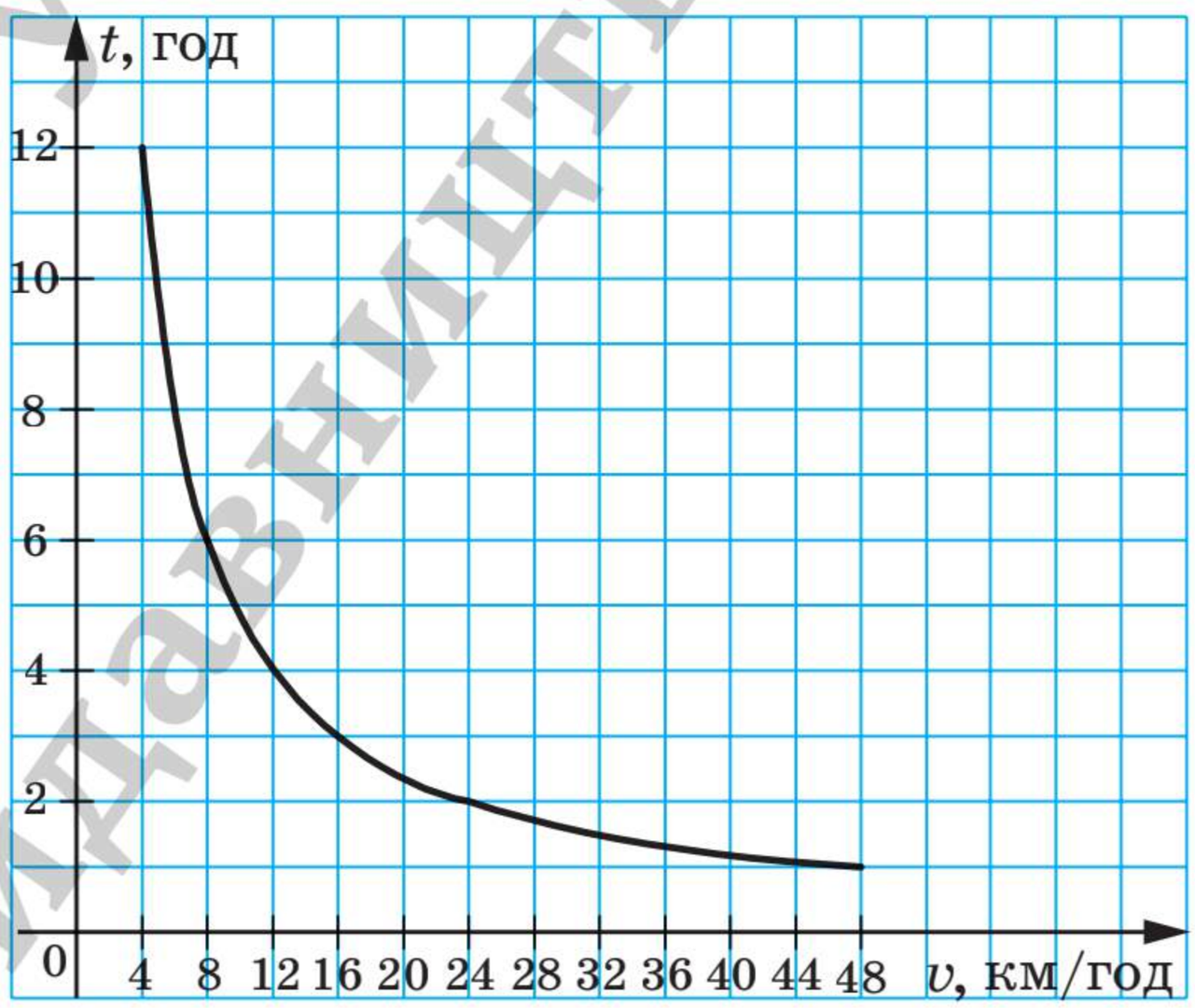


Рис. 12

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з пункту A до пункту B за 3 год; 4 год;
3) чому дорівнює відстань між пунктами A і B.

320.• Дротяний реостат підключено до блоку живлення (рис. 13). Опір реостата R залежить від положення повзунка й може змінюватися в межах від 0 до 6 Ом. Користуючись графіком залежності сили струму I від опору R за умови, що напруга на кінцях реостата залишається незмінною (рис. 14), визначте:
1) чому дорівнює сила струму, якщо опір дорівнює 2 Ом;
2) при якому значенні опору сила струму дорівнює 3 А;
3) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.

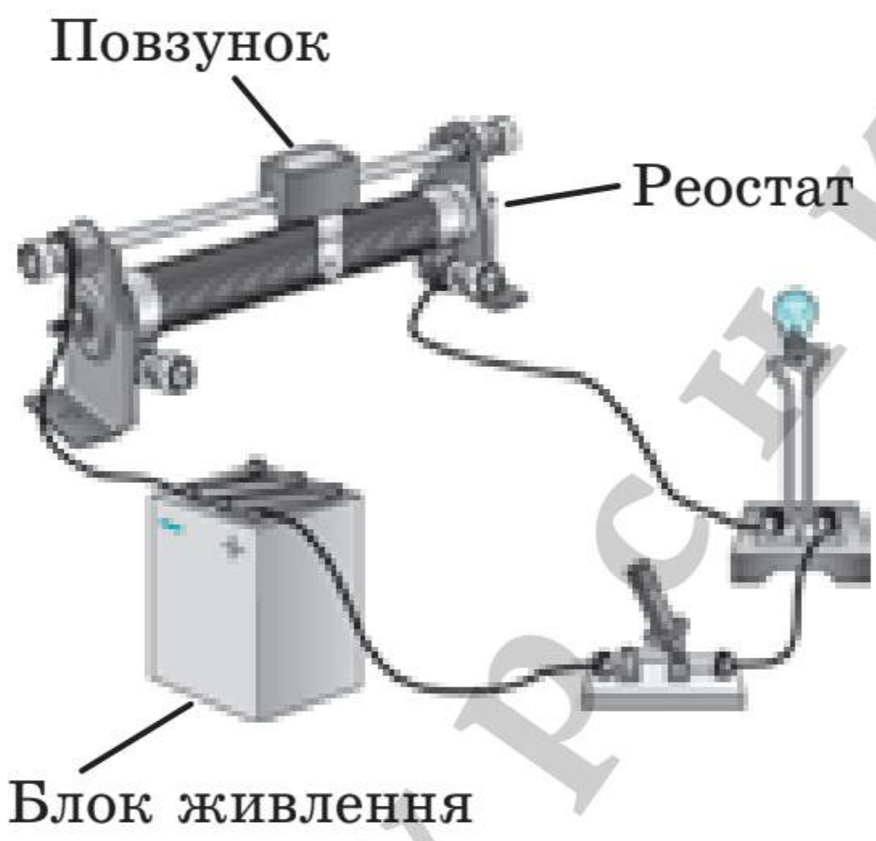


Рис. 13

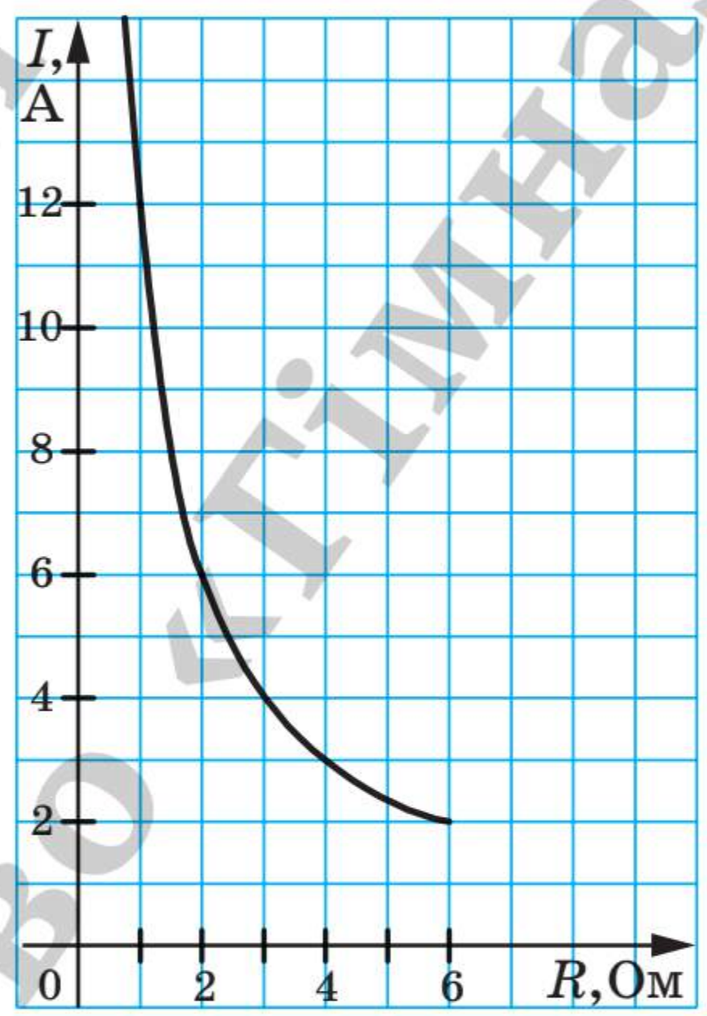


Рис. 14

321.• Знайдіть значення k, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:
1) $A\ (-5;\ 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6};-2\right)$; 3) $C\ (1{,}5;\ -8)$.

322.• Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A\ (10;\ 1{,}6)$.
Чи проходить графік цієї функції через точку:
1) $B\ (-1;\ -16)$; 2) $C\ (-2;\ 8)$?

323.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ та визначте координати точок їхнього перетину.

ЖА2 **324.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

ЖА2 **325.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

ЖА2 **326.**• Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

ЖА2 **327.**• Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

328.• Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

329.• Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

330.•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = \frac{64}{x}$, у яких абсциса й ордината рівні.

331.•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = -\frac{25}{x}$, у яких абсциса й ордината — протилежні числа.

332.•• Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{|x|}$.

333.•• Побудуйте графік функції:

ЖА3 1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ 1 - x, & \text{якщо } x > -1; \end{cases}$ ЖА4 2) $y = \begin{cases} 2x + 2, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, визначте, при яких значеннях a пряма $y = a$ буде мати з графіком даної функції тільки одну спільну точку.

КОПІЮВАННЯ ЗАБОРОНЕНО Видавництво «Підручники і посібники»

334.•• Побудуйте графік функції:

$$y=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ 2, \quad \text{якщо } -2\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{4}{x}, \quad \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

335.•• Побудуйте графік функції:

ЖА5 1) $y=\dfrac{9x-18}{x^2-2x}$; ЖА6 2) $y=\dfrac{5x^2-5}{x-x^3}$.

Користуючись побудованим графіком, визначте, при яких значеннях k пряма $y=kx$ буде мати з графіком даної функції тільки одну спільну точку.

336.•• Побудуйте графік функції $y=\dfrac{10x^2-40}{x^3-4x}$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

337. Завдяки заходам щодо економії електроенергії за перший місяць її витрати було зменшено на 20 %, за другий — на 10 % порівняно з попереднім, а за третій — на 5 % порівняно з попереднім. На скільки відсотків у результаті було зменшено витрати електроенергії?

338. Ціну шафи знизили на 30 %, а через деякий час підвищили на 30 %. Як змінилася, збільшилася чи зменшилася, ціна шафи порівняно з початковою і на скільки відсотків?

Проведіть у класі обговорення: «Чи зміниться відповідь, якщо ціну шафи спочатку підвищити на 30 %, а потім знизити на 30 %?». Висловіть гіпотезу, як зміниться (збільшиться чи зменшиться) ціна товару, якщо її спочатку підвищити (знизити) на a % ($a<100$), а потім знизити (підвищити) на a %. Спробуйте довести свою гіпотезу.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

339. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних, які містить вираз

$$\frac{a^2-b^2}{a+3b}\cdot\left(\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}\right)-\frac{b}{a-b},$$

його значення не залежить від значень змінних.

Комунальний заклад «Відділ освіти Ніжинської міської ради»

340. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}.$$

341. (*Задача Сунь-Цзи*[1].) Два чоловіки отримали монети, які вони повинні поділити між собою так, що коли до монет, які отримає перший із них, додати половину монет другого або до монет, які отримає другий, додати $\frac{2}{3}$ монет першого, то в обох випадках буде 48 монет. Скільки монет має отримати кожен із них?



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

342. Три дитини написали по 100 різних слів. Після цього однакові слова викреслили. У результаті в першої дитини залишилося 45 слів, у другої — 68, а в третьої — 78. Доведіть, що щонайменше одне слово записали всі троє.



ЗАВДАННЯ № 3
«ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.





1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-100}{x-10}=0$.

А) -10; 10;
Б) 10;
В) -10;
Г) коренів немає.

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-10}{x^2-100}=0$.

А) -10; 10;
Б) 10;
В) -10;
Г) коренів немає.

[1] Сунь-Цзи — китайський математик, який жив у III чи IV ст. н. е.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Марії Оплачко»

3. Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $10^{-3} = -1000$;
В) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$;
Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{16}$;
Г) $\frac{1}{7^{-2}} = -49$.

4. Як записують у стандартному вигляді число 42 000?

А) $4{,}2 \cdot 10^3$;
В) $0{,}42 \cdot 10^5$;
Б) $4{,}2 \cdot 10^4$;
Г) $42 \cdot 10^3$.

5. Як записують у вигляді десяткового дробу число $6{,}3 \cdot 10^{-3}$?

А) 0,63;
В) 0,0063;
Б) 0,063;
Г) 0,00063.

6. Подайте число $\frac{1}{25}$ у вигляді степеня з основою 5.

А) 5^{-2};
Б) 5^2;
В) 5^{-3};
Г) 5^3.

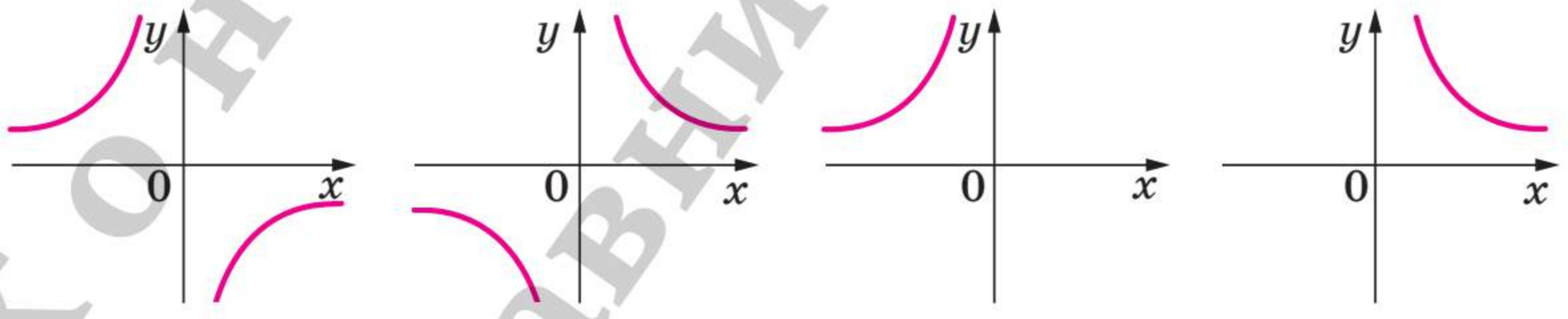
7. Знайдіть значення виразу $\frac{9^{-2} \cdot 3^{-5}}{81 \cdot 27^{-3}}$.

А) 81;
Б) $\frac{1}{81}$;
В) 27;
Г) $\frac{1}{27}$.

8. Яка з даних функцій не є оберненою пропорційністю?

А) $y = \frac{3}{x}$;
В) $y = \frac{3}{2x}$;
Б) $y = -\frac{3}{x}$;
Г) $y = \frac{3x}{2}$.

9. На одному з рисунків зображено графік функції $y = -\frac{4}{x}$. Укажіть цей рисунок.



А) Б) В) Г)

10. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку A (−3; 0,6)?

А) −1,8;
Б) −0,2;
В) −2,4;
Г) −3,6.

КОПІЯ РОБОЧОГО ВИДАННЯ ВІДЕОУРОКІВ ГІМНАЗІЯ

11. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x+1}{4-x}=\dfrac{4x^2+8}{x^2-16}$.

А) 0; 4; Б) −4; 0; В) −4; Г) 0.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А–Д).

Вираз	Тотожно рівний вираз
1) $(c^2)^{-2}$	А) c^2
2) $c^2 : c^{-2}$	Б) c^4
3) $c^2 \cdot c^{-4}$	В) $\dfrac{1}{c}$
	Г) $\dfrac{1}{c^2}$
	Д) $\dfrac{1}{c^4}$

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5x+6}{x-3}-\dfrac{x-2}{x-3}=0$; 2) $\dfrac{x}{x-7}-\dfrac{49}{x^2-7x}=0$.

2.° Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 324 000; 2) 0,0057.

3.° Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^{-6}\cdot a^8$; 2) $a^{-4}:a^{-9}$; 3) $(a^5)^{-3}\cdot a^{10}$.

4.° Спростіть вираз $0{,}4m^9n^{-12}\cdot 5m^{-7}n^{14}$.

5.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{-2}+\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$; 2) $\dfrac{7^{-10}\cdot 7^{-3}}{7^{-11}}$.

6.• Перетворіть вираз $\left(-\dfrac{2}{7}a^{-5}b^9\right)^{-2}\cdot(7a^4b^{-2})^{-3}$ так, щоб він не містив степеня з від'ємним показником.

Київський університет імені Бориса Грінченка
Видавництво «Гімназія»

7.• Обчисліть значення виразу:

1) $(125 \cdot 5^{-4})^2 \cdot (25^{-2})^{-1}$; 2) $\dfrac{(-32)^{-4} \cdot 16^{-3}}{8^{-10}}$.

8.• Розв'яжіть графічно рівняння $\dfrac{6}{x} = x + 5$.

9.•• Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ -4x, \text{ якщо } -1 < x < 1, \\ -4, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, визначте, при яких значеннях a пряма $y = a$ буде мати з графіком даної функції тільки одну спільну точку.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Раціональний вираз

Цілі та дробові вирази називають раціональними виразами.

Допустимі значення змінних

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.

Тотожно рівні вирази

Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають тотожністю.

Основна властивість раціонального дробу

Якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб знайти різницю раціональних дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

Множення раціональних дробів

Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.

Ділення раціональних дробів

Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.

Піднесення раціонального дробу до степеня

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

Рівносильні рівняння

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.

Властивості рівнянь

Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Видавництво «Генеза»

Раціональне рівняння

Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.

Степінь із цілим від'ємним показником

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, і натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степінь з показником, рівним нулю

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.

Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.

Властивості степеня із цілим показником

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основна властивість степеня);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Функція обернена пропорційність

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Область визначення: усі числа, крім 0.
Область значень: усі числа, крім 0.
Графік: гіпербола.
Нуль функції: не існує.
Властивість графіка: якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B\ (-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

§2 КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви ознайомитеся з функцією $y = x^2$ та її властивостями.

Дізнаєтеся про нову дію «добування квадратного кореня». Вам стане зрозуміло, що для вивчення навколишнього світу лише раціональних чисел недостатньо.

Ви ознайомитеся з новим математичним поняттям — арифметичним квадратним коренем, дізнаєтеся про його властивості.

Навчитеся спрощувати вирази, які містять квадратні корені.

11. Функція $y = x^2$ та її графік

Позначимо через y площу квадрата зі стороною x. Тоді $y = x^2$.

Зі зміною сторони x квадрата відповідно змінюватиметься і його площа y.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = x^2$ задає функцію.

Розглянемо функцію $y = x^2$, областю визначення якої є всі числа. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
y	9	$6{,}25$	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	$2{,}25$	4	$6{,}25$	9

Позначимо на координатній площині точки, координати яких $(x; y)$ візьмемо з таблиці (рис. 15).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, буде позначено, тим менше отримана фігура (рис. 16) відрізнятиметься від графіка функції $y = x^2$.

Пара чисел $(0; 0)$ є розв'язком рівняння $y = x^2$. Отже, графік даної функції проходить через початок координат. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, тобто серед позначених точок не може бути точок з від'ємними ординатами.

Київський видавничий центр «Академія»

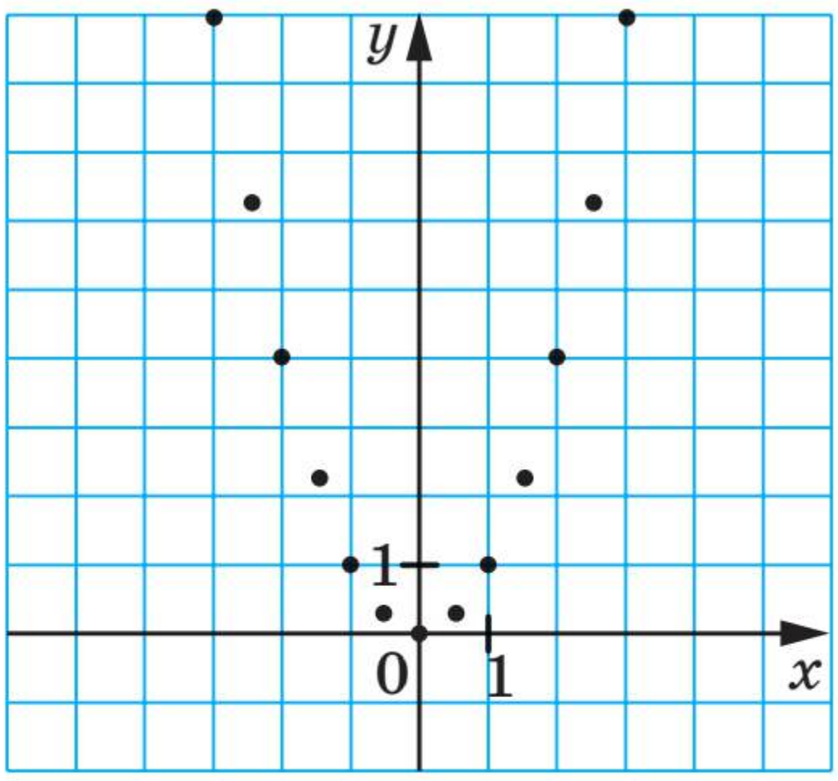


Рис. 15

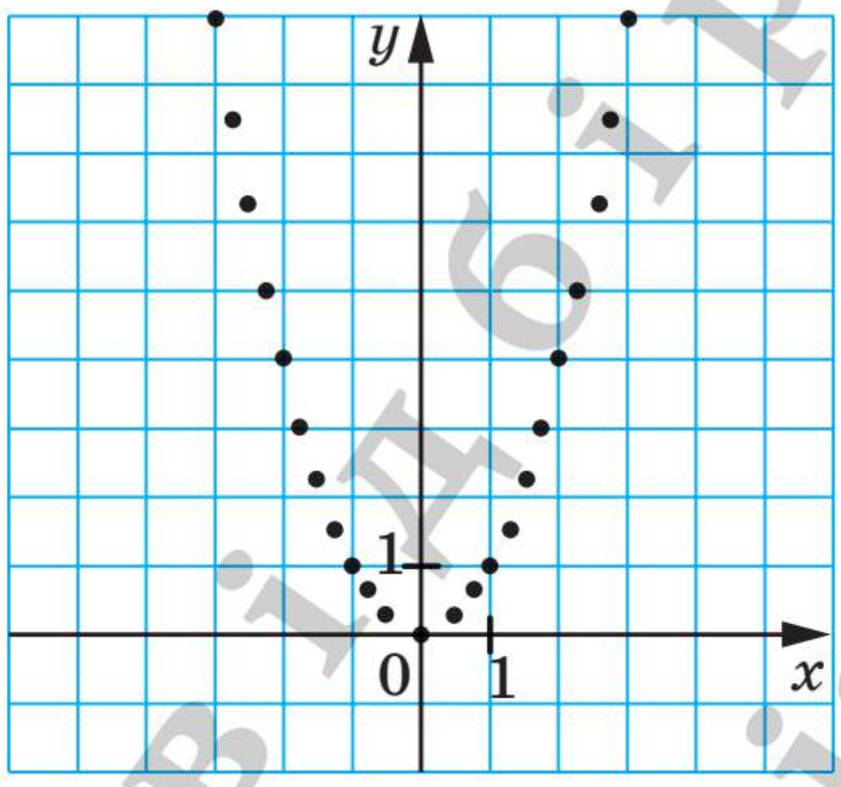


Рис. 16

ЖА1[1]

Областю значень функції $y = x^2$ є всі невід'ємні числа.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру — графік функції $y = x^2$, яку називають **параболою** (рис. 17).

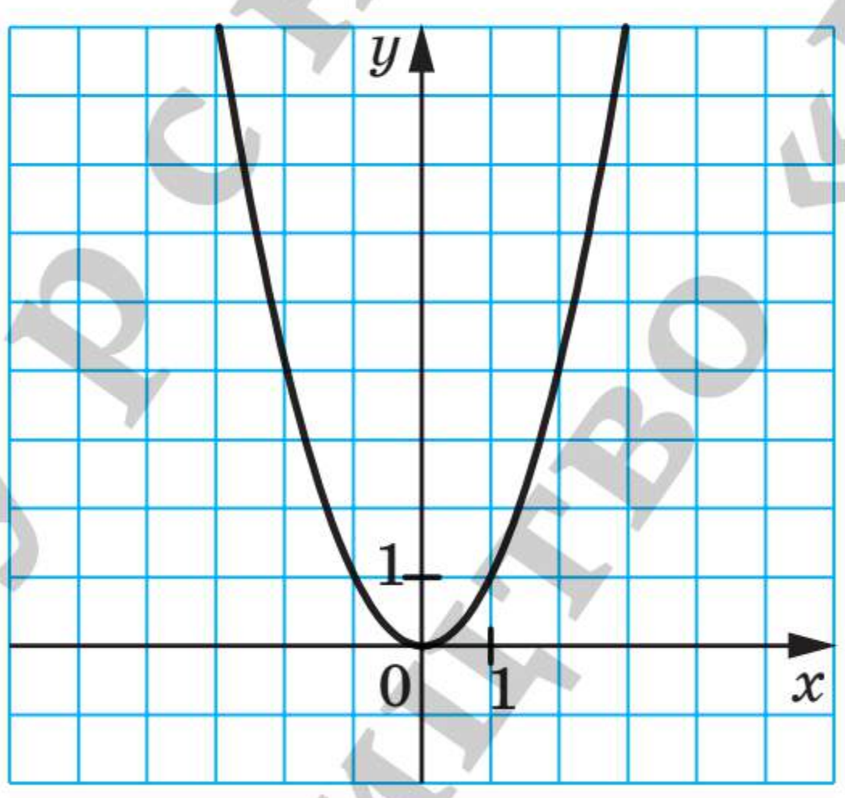


Рис. 17

Точка з координатами (0; 0) ділить параболу на дві рівні частини, кожну з яких називають **віткою параболи**, а саму точку — **вершиною параболи**.

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0 = x_0^2$, то є правильною й рівність $y_0 = (-x_0)^2$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка $B\ (-x_0;\ y_0)$ також належить цій параболі.

---

[1] Урок із побудови графіків функції ви знайдете в електронному додатку до цього пункту.

Конспект видавництва «Ранок»

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$, вивчені у цьому пункті.

Область визначення	Усі числа
Область значень	Усі невід'ємні числа
Графік	Парабола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Властивість графіка	Якщо точка $A(x_0; y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка $B(-x_0; y_0)$ також належить цій параболі.

ПРИКЛАД. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$ (рис. 18). Ці графіки перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 2 і -1. Отже, як при $x = 2$, так і при $x = -1$ значення виразів x^2 і $x + 2$ рівні, тобто числа 2 і -1 є коренями рівняння $x^2 = x + 2$. Перевірка це підтверджує. Справді, $2^2 = 2 + 2$ і $(-1)^2 = -1 + 2$.

Відповідь: 2; -1. ◀

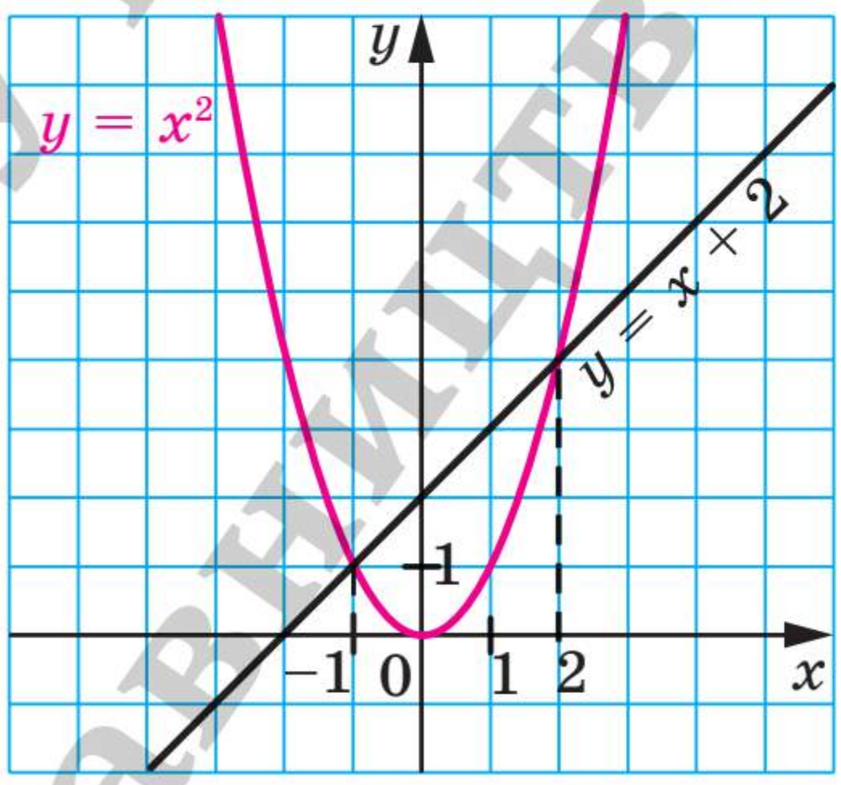


Рис. 18

1. Що є областю визначення функції $y = x^2$? **2.** Що є областю значень функції $y = x^2$? **3.** При якому значенні аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює нулю? **4.** Яка фігура є графіком функції $y = x^2$?

КОПІЮВАННЯ У РОЗДРУКОВУВАННЯ ВИДАВНИЦТВО

ВПРАВИ

343.° Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -6; $0{,}8$; $-1{,}2$; 150;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 49; 0; 2500; $0{,}04$.

344.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = x^2$, визначте, чи проходить цей графік через точку: 1) $A\ (-8;\ 64)$; 2) $B\ (-9;\ -81)$; 3) $C\ (0{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $D\ (0{,}1;\ 0{,}01)$.

345.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

ЖА2 **346.•** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \dfrac{8}{x}$.

ЖА2 **347.•** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \dfrac{1}{x} = 0$.

ЖА2 **348.•** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

ЖА2 **349.•** Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

ЖА3 **350.••** Функцію f задано в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Визначте, при яких значеннях a пряма $y = a$ буде мати з графіком даної функції рівно дві спільні точки.

Копія учбового видання

ЖА4 **351.**•• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{якщо } x\leqslant -1,\\ x^2, & \text{якщо } -1<x<2,\\ 4, & \text{якщо } x\geqslant 2.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Визначте, при яких значеннях a пряма $y=a$ буде мати з графіком даної функції рівно дві спільні точки.

ЖА5 **352.**•• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\leqslant 0,\\ x+1, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Визначте, при яких значеннях a пряма $y=a$ буде мати з графіком даної функції тільки одну спільну точку.

ЖА6 **353.**•• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{x}, & \text{якщо } x\leqslant -1,\\ x^2, & \text{якщо } x>-1.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Визначте, при яких значеннях a пряма $y=a$ буде мати з графіком даної функції рівно дві спільні точки.

354.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^3+x^2}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-4}$.

355.•• Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^3}{x}$.

356.•• Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y=-x^2$. Побудуйте графік цієї функції.

357.* Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y-x^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}=0$; 2) $\dfrac{y-x^2}{y-x}=0$.

358.* Побудуйте графік рівняння

$$\frac{x^2-y}{(x+2)^2+(y-4)^2}=0.$$

359.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 19.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА

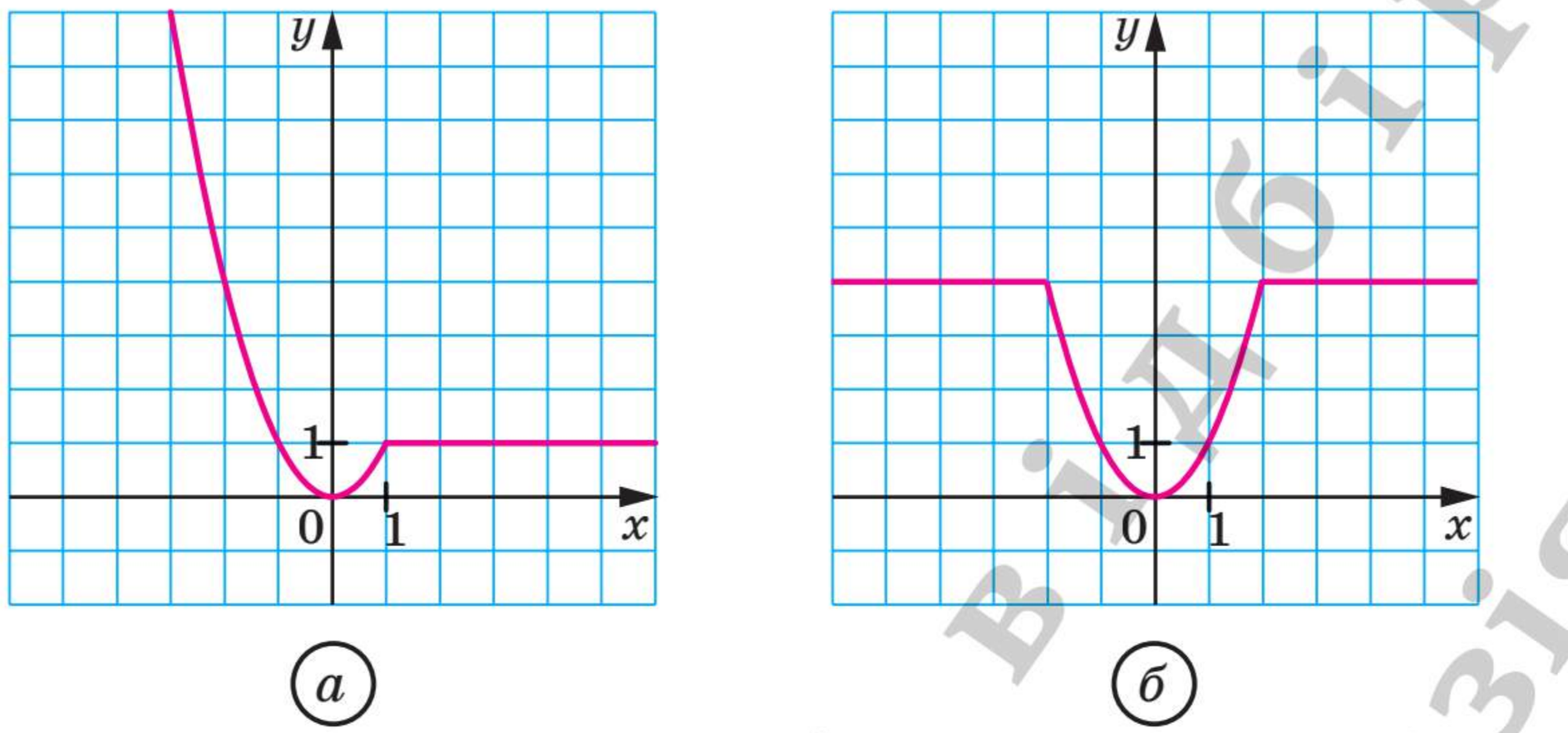


Рис. 19

360.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 20.

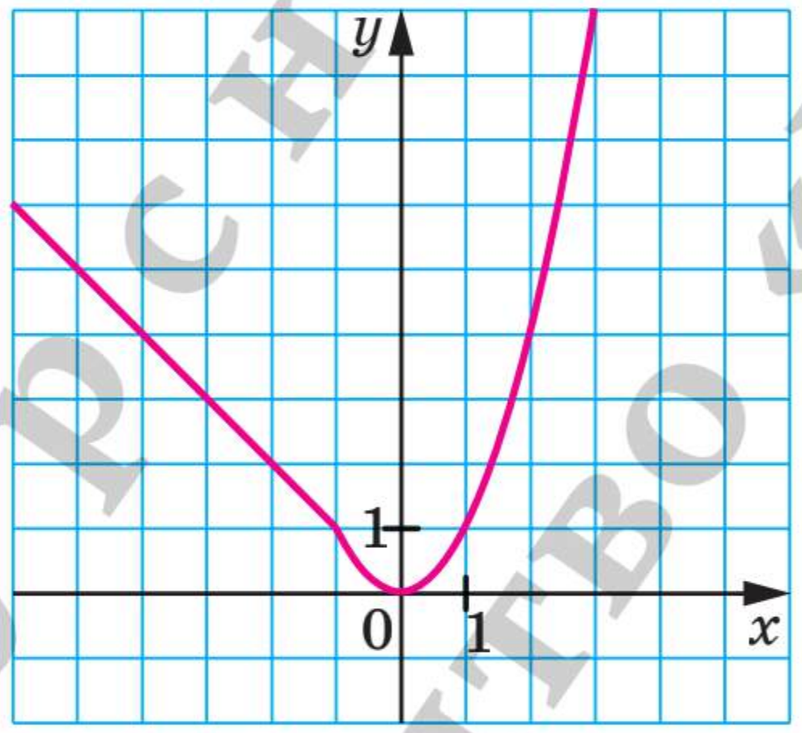


Рис. 20

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

361. Доведіть тотожність

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right) = a+b.$$

362. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

363. Доведіть, що значення виразу $27^6 - 9^7$ кратне 48.

КОПІЯ КУРСНОГО ВИДАННЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

364. У 2013 р. кількість інтернет-користувачів і користувачок в Україні становила 18,5 млн осіб, у 2017 р. — 26,3 млн осіб, у 2018 р. — 27,8 млн осіб, у 2022 р. — 34,1 млн осіб. За який із періодів, 2013–2017 рр. чи 2018–2022 рр., був більшим відсотковий приріст кількості інтернет-користувачів і користувачок?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

365. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 1) 25 см^2; 2) 1600 дм^2; 3) 0,04 м^2.

366. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

367. При яких значеннях a рівняння $x^2 = a$ не має коренів?

368. Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = 1$ та знайдіть координати їхніх спільних точок.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

369. Натуральні числа x, y, z такі, що значення виразів $x + y$, $y + z$, $x + z$ — прості числа. Доведіть, що серед чисел x, y, z є принаймні два числа, які дорівнюють 1.

12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо квадрат, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Нехай довжина його сторони дорівнює x одиниць. Тоді рівняння $x^2 = 49$ можна розглядати як математичну модель задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям.

Коренями цього рівняння є числа 7 і -7. Говорять, що числа 7 і -7 є **квадратними коренями** із числа 49.

Означення:

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

Наведемо кілька прикладів.

Квадратними коренями із числа 9 є числа 3 і -3. Справді, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратними коренями із числа $\frac{25}{4}$ є числа $\frac{5}{2}$ і $-\frac{5}{2}$. Справді, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратним коренем із числа 0 є тільки число 0. Справді, існує лише одне число, квадрат якого дорівнює нулю, — це число 0.

Оскільки не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то квадратного кореня з від'ємного числа не існує.

Додатний корінь рівняння $x^2 = 49$, число 7, є відповіддю до задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Це число називають **арифметичним квадратним коренем** із числа 49.

Означення:

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ називають **знаком квадратного кореня** або **радикалом** (від лат. *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають: «квадратний корінь з a», опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у записі $\sqrt{b-5}$ двочлен $b - 5$ є підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що ***підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень.***

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа називають **добуванням квадратного кореня.**

Розглянемо кілька прикладів.

$\sqrt{9} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, оскільки $\frac{5}{2} \geqslant 0$ і $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^2 = 0$.

Узагалі, ***рівність*** $\sqrt{a}=b$ ***виконується за умови, що*** $b\geqslant 0$ і $b^2=a$.

Цей висновок можна подати в іншій формі:

для будь-якого невід'ємного числа a ***справедливо, що*** $\sqrt{a}\geqslant 0$ ***і*** $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

Наприклад, $\sqrt{4}\geqslant 0$ і $\left(\sqrt{4}\right)^2=4$, $\sqrt{2}\geqslant 0$ і $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, $\sqrt{5{,}2}\geqslant 0$ і $\left(\sqrt{5{,}2}\right)^2=5{,}2$.

Наголосимо, що до поняття квадратного кореня ми прийшли, розв'язуючи рівняння виду $x^2=a$, де $a\geqslant 0$. Коренями цього рівняння є числа, кожне з яких є квадратним коренем із числа a.

Пошук коренів рівняння $x^2=a$ проілюструємо, розв'язавши графічно рівняння $x^2=4$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y=x^2$ і $y=4$ (рис. 21). Точки перетину цих графіків мають абсциси 2 і -2, які і є коренями заданого рівняння.

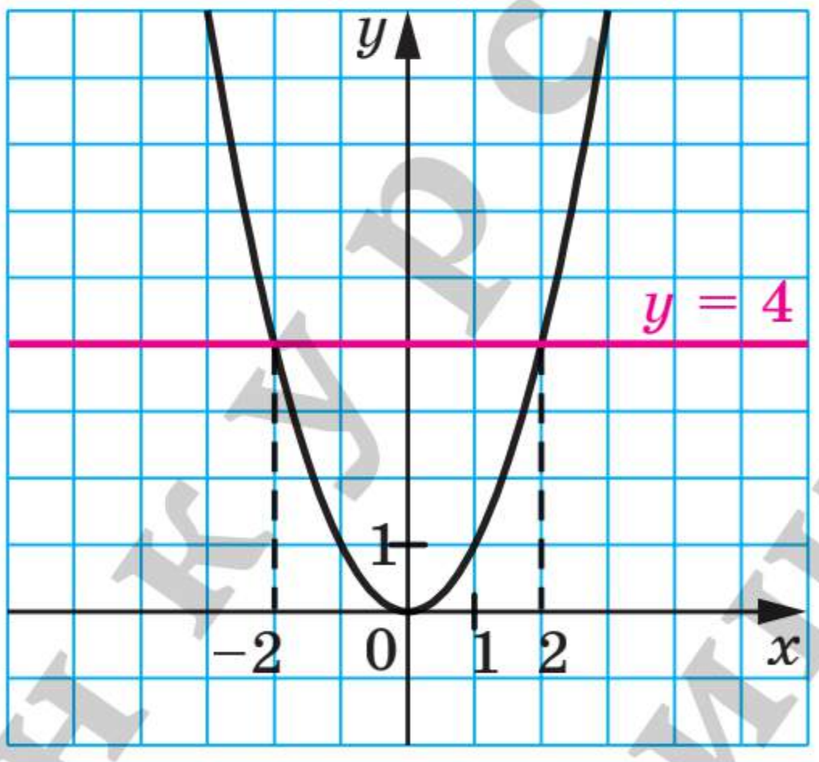


Рис. 21

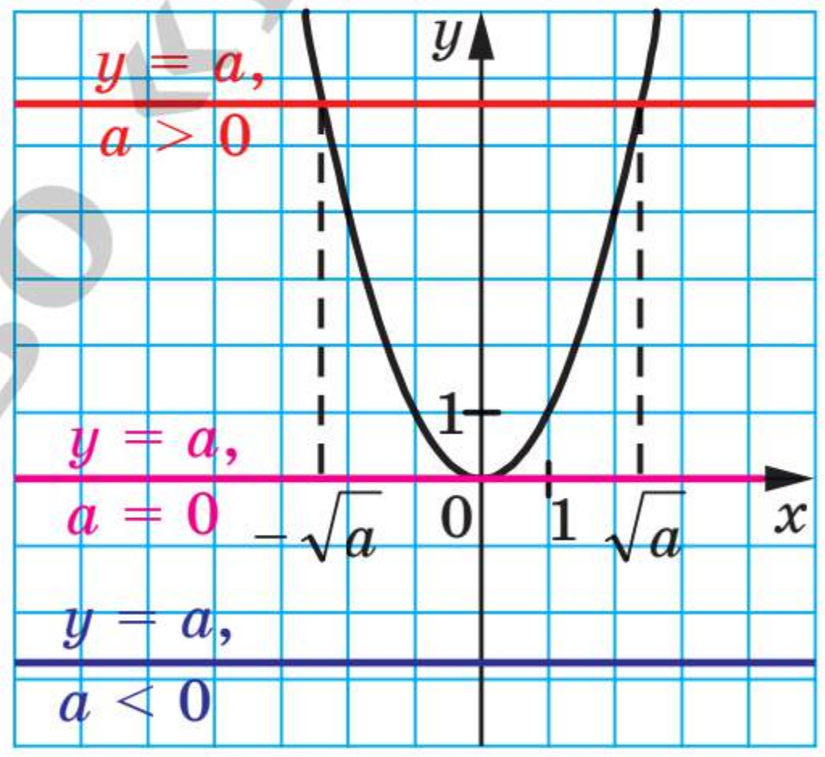


Рис. 22 ЖА1

Рівняння $x^2=a$ при $a<0$ не має коренів, що підтверджується графічно: графіки функцій $y=x^2$ і $y=a$ при $a<0$ спільних точок не мають (рис. 22).

При $a=0$ рівняння $x^2=a$ має єдиний корінь $x=0$, що також підтверджується графічно: графіки функцій $y=x^2$ і $y=0$ мають тільки одну спільну точку (рис. 22).

Графічний метод також дозволяє зробити такий висновок: якщо $a>0$, то рівняння $x^2=a$ має два корені. Справді, парабола $y=x^2$ і пряма $y=a$, де $a>0$, мають дві спільні точки

(рис. 22). При цьому коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Дійсно, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 5$ має два корені: $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$.

ПРИКЛАД 1. Знайдіть значення виразу $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Розв'язання. Застосувавши правило піднесення добутку до степеня та тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, отримуємо:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тоді $x = 6^2$; $x = 36$.

Відповідь: 36.

2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

Відповідь: 7. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть рівняння $(x-5)^2 = 16$.

Розв'язання. $(x-5)^2 = 16$;

$x - 5 = -4$ або $x - 5 = 4$;

$x = 1$ або $x = 9$.

Відповідь: 1; 9. ◀

ПРИКЛАД 4. Розв'яжіть рівняння $(3x-1)^2 = 2$.

Розв'язання. $(3x-1)^2 = 2$;

$3x - 1 = -\sqrt{2}$ або $3x - 1 = \sqrt{2}$;

$3x = 1 - \sqrt{2}$ або $3x = 1 + \sqrt{2}$;

$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$ або $x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. ◀

ПРИКЛАД 5. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x}-2}$?

Розв'язання. 1) Вираз $\sqrt{-5x}$ має зміст, якщо підкореневий вираз $-5x$ набуває невід'ємних значень. Підкореневий вираз є добутком двох множників, один з яких є від'ємним

числом. Отже, цей добуток набуватиме невід'ємних значень, якщо другий множник x набуватиме недодатних значень.

Відповідь: при $x \leqslant 0$.

2) Даний вираз має зміст, якщо виконуються дві умови: має зміст вираз $\sqrt{x}$ і знаменник $\sqrt{x}-2$ відмінний від нуля. Отже, повинні одночасно виконуватися дві умови: $x \geqslant 0$ і $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Звідси $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$.

Відповідь: при $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$. ◀

ПРИКЛАД 6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$;

2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$;

3) $(x+2)\sqrt{x-2}=0$.

Розв'язання. 1) Ліва частина даного рівняння має зміст, якщо підкореневі вирази $-x$ і $x-2$ одночасно набувають невід'ємних значень. З того, що перший підкореневий вираз має бути невід'ємним, маємо: $-x \geqslant 0$, тоді $x \leqslant 0$. Але коли $x \leqslant 0$, то другий підкореневий вираз, $x-2$, набуває тільки від'ємних значень. Отже, ліва частина даного рівняння не має змісту.

Відповідь: коренів немає.

2) Ліва частина даного рівняння є сумою двох доданків, кожен з яких може набувати тільки невід'ємних значень. Тоді їхня сума дорівнюватиме нулю, якщо кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, одночасно мають виконуватися дві умови: $\sqrt{x^2-2x}=0$ і $\sqrt{x-2}=0$. Це означає, що треба знайти спільні корені отриманих рівнянь, тобто розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x}=0, \\ \sqrt{x-2}=0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2-2x=0, \\ x-2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-2)=0, \\ x=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \text{ або } x=2, \\ x=2. \end{cases}$

Розв'язком останньої системи, а отже, і початкового рівняння, є число 2.

Відповідь: 2.

3) Використовуючи умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$x+2=0 \text{ або } \sqrt{x-2}=0;$$
$$x=-2 \text{ або } x=2.$$

Київський видавничий коледж «Інтермедіа»

Проте при $x = -2$ вираз $\sqrt{x-2}$ не має змісту. Отже, дане рівняння має єдиний корінь — число 2.

Відповідь: 2. ◀

1. Що називають квадратним коренем із числа a? **2.** Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a? **3.** Як позначають арифметичний квадратний корінь із числа a? **4.** Як називають знак $\sqrt{\ }$? **5.** Як читають запис $\sqrt{a}$? **6.** Як називають вираз, який стоїть під радикалом? **7.** Яких значень може набувати підкореневий вираз? **8.** Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа? **9.** Чому дорівнює значення виразу $(\sqrt{a})^2$ для будь-якого невід'ємного числа a? **10.** Скільки коренів має рівняння $x^2 = a$ при $a > 0$? Чому вони дорівнюють? **11.** Чи має корені рівняння $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Пригадайте. У складених кількісних числівниках відмінюємо всі складові частини, наприклад: Н. в. *сімсот тридцять два, три тисячі чотириста дев'яносто п'ять*; Р. в. *семисот тридцяти двох, трьох тисяч чотирьохсот дев'яноста п'яти*; Д. в. *семистам тридцяти двом, трьом тисячам чотирьомстам дев'яноста п'ятьом*; З. в. *сімсот тридцять два, три тисячі чотириста дев'яносто п'ять*; О. в. *сімомастами тридцятьма двома, трьома тисячами чотирмастами дев'яноста п'ятьома*; М. в. *(на) семистах тридцяти двох, (на) трьох тисячах чотирьохстах дев'яноста п'яти.*

ВПРАВИ

370.° Чому дорівнює квадратний корінь із числа 16? із числа 1? із числа 0? Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь із цих чисел?

371.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$; 5) $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$;
2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

372.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{100}$; 4) $\sqrt{225}$;

Київський видавничий центр «Академія»

5) $\sqrt{0,25}$; 8) $\sqrt{1,96}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;

6) $\sqrt{0,01}$; 9) $\sqrt{400}$; 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 15) $\sqrt{0,0004}$;

7) $\sqrt{1,21}$; 10) $\sqrt{3600}$; 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 16) $\sqrt{0,000025}$.

373.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10\,000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;

3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$.

374.° Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

Обґрунтуйте вашу думку. Обговоріть ваші відповіді з однокласниками й однокласницями.

375.° Знайдіть число, арифметичний квадратний корінь з якого дорівнює:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) -9.

376.° Користуючись таблицею квадратів натуральних чисел, розміщеною на форзаці, знайдіть:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

377.° Знайдіть:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

378.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4,2}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$;

7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$; 9) $\left(-0{,}3\sqrt{2}\right)^2$.

379.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

380.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16+9}$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$;

3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$;

4) $\sqrt{100}\cdot\sqrt{0{,}64}$;

5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$;

6) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt{0{,}01}$;

7) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$;

8) $-2\sqrt{0{,}16}+0{,}7$;

9) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$;

10) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

12) $\sqrt{4\cdot5^2-8^2}$.

381.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$;

3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$;

4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0{,}2\sqrt{1600}$;

5) $\left(2\sqrt{6}\right)^2-3\left(\sqrt{21}\right)^2$;

6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

382.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12+a}$, якщо $a=0{,}25$;

2) $\sqrt{7-3b}$, якщо $b=2$;

3) $\sqrt{2a-b}$, якщо $a=34$, $b=19$.

383.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27+m}$, якщо $m=54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, якщо $m=0{,}13$, $n=-0{,}04$.

384.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$; 3) $\sqrt{x}-0{,}2=0$; 4) $\sqrt{x}+7=0$.

385.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

386.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0{,}49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$.

387.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 0{,}81$; 3) $x^2 = 7$; 4) $x^2 = 3{,}6$.

388.• Знайдіть значення виразу:

1) $-0{,}06 \cdot \sqrt{10\,000} + \dfrac{8}{\sqrt{256}} - 2{,}5\sqrt{3{,}24}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{2^3 + 17}$;

3) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}} + 3\sqrt{7\dfrac{1}{9}} - 0{,}6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$;

5) $\left(3\sqrt{8}\right)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(\sqrt{24}\right)^2$.

389.• Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}15\sqrt{3600} - 0{,}18\sqrt{400} + \left(10\sqrt{0{,}08}\right)^2$;

2) $\dfrac{95}{\sqrt{361}} - \dfrac{13}{14}\sqrt{1\dfrac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$.

390.• Знайдіть значення виразу $\dfrac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$, якщо

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

391.• При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-8}$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 13) $\dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$;

2) $\sqrt{-x}$; 6) $\sqrt{8-x}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$; 14) $\sqrt{|x|}$;

3) $\sqrt{x^2}$; 7) $\sqrt{x^2+8}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;

4) $\sqrt{-x^2}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 12) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$; 16) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$?

Серед даних виразів укажіть ті, що мають зміст лише при одному значенні змінної. Придумайте ще два вирази, які мають цю властивість. Порівняйте ваші вирази з виразами, придуманими однокласниками й однокласницями.

Комунальний заклад «Київський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Видавництво «Ліцей»

392.• При яких значеннях y має зміст вираз:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{y}-1}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$?

393.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x}-4=0$; 4) $\frac{42}{\sqrt{x}}=6$;

2) $\sqrt{5x-4}=0$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}}=9$;

3) $\sqrt{5x-4}=6$; 6) $\sqrt{x^2-36}=8$.

394.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$; 3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$; 4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

395.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2=0$; 3) $(x+6)^2=3$;

2) $(x+6)^2=9$; 4) $(7x+6)^2=5$.

396.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=6$; 3) $(2x-3)^2=7$.

397.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;

398.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

399.•• При яких значеннях a і b має зміст вираз:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

400.•• Чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні x має зміст вираз: 1) $\sqrt{x^2-4x+4}$; 2) $\sqrt{x^2-4x+5}$? Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

401.•• Доведіть, що не існує такого значення x, при якому має зміст вираз $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

402.•• Який з даних виразів має зміст при будь-якому значенні x: 1) $\sqrt{x^2+8x+15}$; 2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

403.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = -x$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$;
3) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x-1} = 0$;
4) $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$;
5) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$;
6) $(x+1)\sqrt{x-1} = 0$.

Поміркуйте, чому на перший погляд дуже схожі рівняння 5) і 6) мають різну кількість коренів. Проведіть у класі відповідне обговорення.

404.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$;
3) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$;
4) $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$.

405.•• При яких значеннях a рівняння $x^2 = a + 1$:

1) має два корені;
2) має один корінь;
3) не має коренів?

406.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-x^2}$;
2) $y = \sqrt{-x^2 - 4x - 4} + 2$;
3) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

407.•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2x - 1 - x^2} - 1$.

408.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt{x-1} = 0$;
2) $\sqrt{(a-1)x} = 0$;
3) $a\sqrt{x-1} = a$;
4) $\sqrt{x-2} = a$.

409.* При яких значеннях a рівняння $\left(\sqrt{x} - 1\right)(x - a) = 0$ має тільки один корінь?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

410. Щомісяця працівникові аграрної фірми нараховують 16 000 грн заробітної плати. Із цієї суми утримується податок на доходи фізичних осіб, який становить 18 % від заробітної плати, а ще 5 % йде на військовий збір. Розрахуйте загальну суму податків, яку сплатить цей працівник за рік.

В Конституції написано:

Конституція України

Стаття 67. Кожен зобов'язаний сплачувати податки і збори …

Обговоріть у класі, чому кожна людина, яка працює, зобов'язана сплачувати податки. За можливості проведіть розрахунки сум податків, які сплачують члени вашої родини або ваші знайомі.

411. Українські лінгвісти і лінгвістки дослідили велику кількість сучасних текстів і підрахували, наскільки часто в них трапляється та чи інша буква українського алфавіту. У таблиці наведено інформацію про те, скільки разів у середньому трапляються деякі літери на кожні 1000 букв. На діаграмі (рис. 23) подано цю інформацію. Установіть відповідність між стовпцями діаграми та буквами.

Буква	а	и	н	о	р	с
Скільки разів трапляється буква	64	55	68	86	43	37

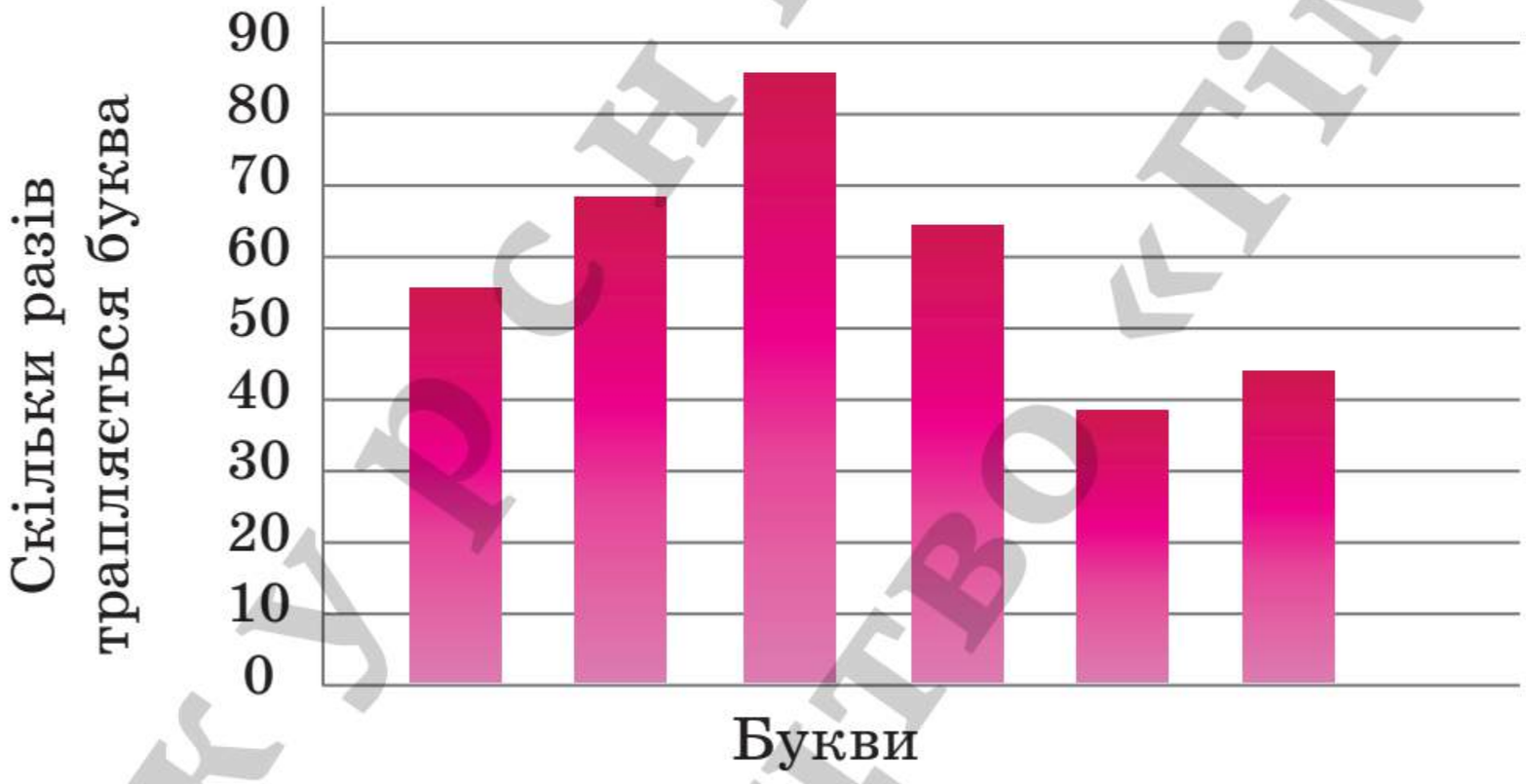


Рис. 23

↔ Створіть групу з однокласників і однокласниць для роботи в лінгвістичному проєкті. Учасники / учасниці групи вибирають дві сторінки зі свого улюбленого твору української літератури, далі, зробивши відповідні розрахунки, складають аналогічні таблиці для букв м, і, п, у, к, я, порівнюють отримані дані та роблять висновки.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

412. Будинки на вулиці пронумеровано поспіль числами від 1 до 24. Скільки разів цифра 1 трапляється в нумерації?

413. Спростіть вираз $\left(\dfrac{a}{a^2-25}+\dfrac{5}{5-a}+\dfrac{1}{a+5}\right):\left(\dfrac{28-a^2}{a+5}+a-5\right)$.

414. Робітниця одержала 4700 грн авансу купюрами по 100 грн і по 500 грн. Скільки було купюр кожного номіналу, якщо всього була 31 купюра?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

415. Знайдіть усі трицифрові натуральні числа n такі, що сума цифр числа n в 11 разів менша від самого числа n.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Чи ростуть у городі радикали?

У Стародавній Греції дію добування кореня ототожнювали з пошуком сторони квадрата за його площею, а сам квадратний корінь називали «стороною».

У Стародавній Індії слово «мула» означало «початок», «основа», «корінь дерева». Це слово почали застосовувати й до сторони квадрата, можливо, виходячи з такої асоціації: зі сторони квадрата, як із кореня, виростає сам квадрат. Мабуть, тому в латинській мові поняття «сторона» та «корінь» виражаються одним і тим самим словом — *radix*. Від цього слова походить термін «радикал».



Рене Декарт
(1596–1650)

Слово *radix* можна також перекласти як «редис», тобто коренеплід — частина рослини, видозмінений корінь, який може бути їстівним.

У XIII–XV ст. європейські математики, скорочуючи слово *radix*, позначали квадратний корінь знаками R, $\mathcal{R}$, R^2. Наприклад, запис $\sqrt{7}$ мав такий вигляд: R^27.

У XVI ст. математики стали використовувати знак $\surd$. Походження цього символу, мабуть, пов'язано з виглядом рукописної латинської букви r.

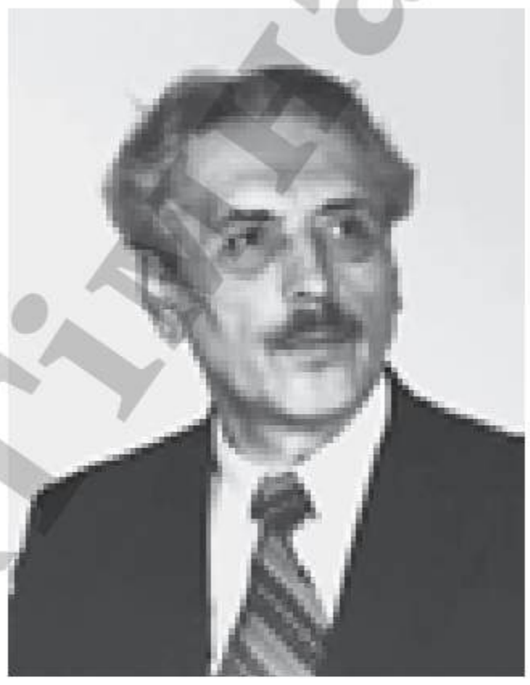
У XVII ст. видатний французький математик Рене Декарт, поєднавши знак $\surd$ з горизонтальною рискою, отримав символ $\sqrt{}$, який ми й використовуємо сьогодні.

Копія Видавництво

Перша задача першої математичної олімпіади в Україні

Задача 390 варта уваги ще й тому, що в 1935 р. саме її умовою відкривався текст першої математичної олімпіади в Україні. Ініціатором цих математичних змагань був видатний український математик, академік Михайло Пилипович Кравчук (його портрет розміщено на форзаці на початку підручника). Пам'ятник М. П. Кравчуку встановлений на території Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». На базі цього навчального закладу раз на два роки проводять Міжнародні математичні конференції імені академіка М. П. Кравчука.

За понад 80 років математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів і школярок першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі в усьому науковому світі. Ці видатні вчені в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.



О. В. Погорєлов
(1919–2002)

Із задоволенням зазначаємо, що й сьогодні математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. В організації та проведенні олімпіад задіяно наукову та освітянську спільноту. Саме завдяки ентузіазму та професіоналізму цієї спільноти команда України гідно представляє нашу країну на **міжнародних математичних олімпіадах**.

Радимо й вам, любі восьмикласники та восьмикласниці, брати участь у математичних олімпіадах.

13. Множина та її елементи. Підмножина

Ми часто говоримо: стадо баранів, букет квітів, колекція марок, косяк риб, зграя птахів, рій бджіл, зібрання картин, набір ручок, компанія друзів.

Якщо в цих парах перемішати перші слова, то може вийти смішно: букет баранів, косяк картин, колекція друзів. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція

птахів, колекція картин, колекція ручок тощо є прийнятними. Річ у тім, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є термін, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це термін **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x; y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремим найважливішим множинам присвоєно загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура;**
- множина точок, які мають задану властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ);**
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D і т. д.

Об'єкти, які складають дану множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими літерами латинського алфавіту: a, b, c, d і т. д.

Якщо a — елемент множини A, то пишуть: $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не є елементом множини A, то пишуть: $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть: $A = \{a, b, c\}$.

Якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Задавати множину за допомогою фігурних дужок, у яких вказано список її елементів, зручно у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення:

Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

Якщо множини A і B рівні, то пишуть: $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, припускають шість варіантів запису множини, яка складається з трьох елементів a, b, c:

$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі розглядатимемо множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «космодром» має вид {к, о, с, м, д, р}.

Зазначимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із таких двох способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких указували перелік її елементів. Зрозуміло, що не будь-яку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати неможливо.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яку мають усі елементи даної множини й тільки вони. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може виявитися, що жоден об'єкт цієї властивості не має.

Звернемося до прикладів.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів і учениць вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, потрібно передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Конспект вчителя

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** та позначають символом $\varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення:

Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B — підмножина множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:

- множина учнів і учениць вашого класу є підмножиною множини учнів і учениць вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 24);
- множина прямокутників є підмножиною множини паралелограмів;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.



Рис. 24

Для ілюстрації співвідношень між множинами користуються схемами, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 25 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

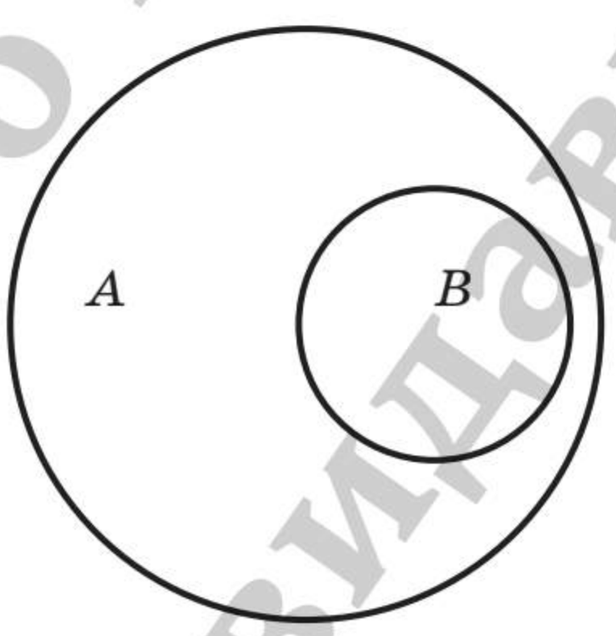


Рис. 25

З означень підмножини та рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. З огляду на ці міркування порожню множину вважають підмножиною будь-

якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливо твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

ПРИКЛАД. Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. ◀

1. Як позначають множину та її елементи? **2.** Як позначають область визначення та область значень функції? **3.** Як записати, що елемент належить (не належить) множині A? **4.** Які множини називають рівними? **5.** Які існують способи задання множин? **6.** Яку множину називають порожньою? Як її позначають? **7.** Яку множину називають підмножиною даної множини? **8.** Як наочно ілюструють співвідношення між множинами? **9.** Яка множина є підмножиною будь-якої множини?

ВПРАВИ

416.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

417.° Як називають множину вовків, що підкорюються одному ватажку?

418.° Назвіть яку-небудь множину учнів і учениць вашої школи.

419.° Як називають множину вчителів і вчительок, які працюють в одній школі?

420.° Дано функцію $f(x) = x^2$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$; 2) $0 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.

421.° Як ви вважаєте, які з наведених тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

Обговоріть ваші відповіді в класі.

422.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

Видавництво «Ранок»

423.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:
1) букв української мови, яким відповідають голосні звуки;
2) правильних дробів, знаменник яких не більший за 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.

424.° Як ви вважаєте, які з множин A і B є рівними, якщо:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

Обговоріть ваші відповіді з однокласниками й однокласницями.

425.° Назвіть кілька підмножин учнів і учениць вашого класу.

426.° Нехай A — множина букв слова «координата». Множина букв якого зі слів є підмножиною множини A:
1) трактор; 4) нитки; 7) дорога;
2) картина; 5) нарада; 8) корона?
3) крокодил; 6) дарунок;

427.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:
1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\,888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\,258$?

428.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

429.• Чи рівні множини A і B, якщо:
1) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, B — множина невід'ємних чисел;
2) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

430.• Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої її проведено;
4) множина функцій, графіками яких є кола?

Наведіть приклади ще двох множин, які дорівнюють порожній множині. Порівняйте ваші приклади з прикладами, придуманими однокласниками й однокласницями.

431.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

432.• Розташуйте дані множини в такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників, B — множина чотирикутників, C — множина квадратів, D — множина паралелограмів;

2) A — множина ссавців, B — множина псових, C — множина хребетних, D — множина вовків, E — множина хижих ссавців.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

433. Після утримання податку на доходи фізичних осіб у розмірі 18 % від заробітної плати і 5 % військового збору, інженер отримав 24 640 грн. Яка заробітна плата була йому нарахована? Скільки гривень він заплатив на користь держави?

434. У саду росте більше ніж 80, але менше ніж 100 дерев. Кожне третє дерево — яблуня, а кожне восьме — груша. Скільки дерев росте в саду?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

435. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{5b}{b-3} - \dfrac{b+6}{2b-6} \cdot \dfrac{90}{b^2+6b}$;

2) $\dfrac{b+2}{b^2-2b+1} : \dfrac{b^2-4}{3b-3} - \dfrac{3}{b-2}$.

436. Моторний човен проплив 36 км за течією річки за 3 год і 36,8 км проти течії за 4 год. Яка швидкість течії річки?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

437. Прочитайте періодичний дріб і назвіть його період:

1) 0,(7); 2) 2,(28); 3) 5,3(54); 4) 8,636363... .

438. Перетворіть у десятковий дріб:

1) $\dfrac{3}{5}$; 2) $\dfrac{5}{8}$; 3) $\dfrac{11}{16}$; 4) $\dfrac{57}{40}$; 5) $\dfrac{36}{15}$.

439. Перетворіть звичайний дріб у нескінченний періодичний десятковий дріб і визначте його період:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{14}{15}$; 3) $\dfrac{3}{11}$; 4) $\dfrac{25}{18}$.

Видавництво «Ранок»



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

440. Петро та Зоряна щодня записують по одному числу. Першого дня кожен з них записав число 1. Кожного наступного дня Петро записує число 1, а Зоряна — число, яке дорівнює сумі чисел, записаних ними за попередні дні. Чи може якогось дня Зоряна написати число, запис якого закінчуватиметься на 101?

14. Числові множини



Натуральні числа — це перші числа, якими почали користуватися люди. З ними ви ознайомилися в дитинстві, коли вчилися рахувати предмети. Усі натуральні числа утворюють **множину натуральних чисел**, яку позначають буквою $\mathbb{N}$.

Практичні потреби людей спричинили **виникнення дробових чисел. Згодом з'явилася необхідність розглядати величини, для характеристики яких додатних чисел виявилося замало. Так виникли від'ємні числа.**

Усі натуральні числа, протилежні їм числа та число нуль утворюють **множину цілих чисел**, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$.

Наприклад, $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

Множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел, тобто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Цілі та дробові (як додатні, так і від'ємні) числа утворюють множину раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$. Наприклад, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-0{,}2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

Зрозуміло, що $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Схема, зображена на рисунку 26, показує, як співвідносяться множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$.

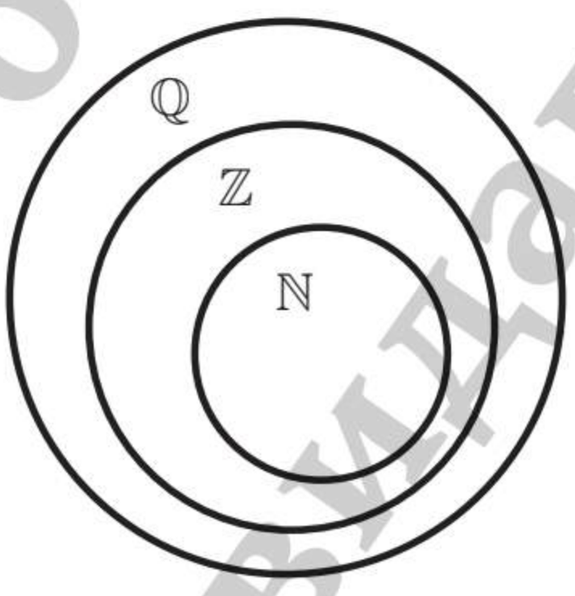


Рис. 26

Кожне раціональне число можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад, $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5{,}3 = \frac{53}{10}$.

З можливістю такого подання пов'язана назва «раціональне число»: одним із значень латинського слова *ratio* є «відношення».

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

У 6 класі ви дізналися, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати, виконавши ділення числа m на число n куточком.

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0{,}625$, $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$.

Число $\frac{5}{8}$ записано у вигляді скінченного десяткового дробу, а число $\frac{5}{11}$ — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. У записі $0{,}454545\ldots$ цифри 4 і 5 періодично повторюються. Нагадаємо, що групу цифр, яка повторюється, називають **періодом дробу** й записують у круглих дужках. У даному випадку період дробу становить 45, а дріб $\frac{5}{11}$ записують так: $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Зауважимо, що будь-який скінченний десятковий дріб і будь-яке ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад,

$$0{,}625 = 0{,}6250000\ldots = 0{,}625(0);$$
$$2 = 2{,}000\ldots = 2{,}(0).$$

Отже, ***кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.***

Справедливим є й таке твердження:

кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа.

У 9 класі ви навчитеся записувати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу.

Сума й добуток двох натуральних чисел є натуральними числами. Проте різниця натуральних чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $(5-7) \notin \mathbb{N}$.

Сума, різниця, добуток двох цілих чисел є цілими числами. Проте частка цілих чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

КОПІЯ РУКОПИСУ ВИДАВНИЦТВА «ГІМНАЗІЯ»

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на нуль) двох раціональних чисел є раціональними числами.

Отже, дія віднімання натуральних чисел може вивести результат за межі множини $\mathbb{N}$, дія ділення цілих чисел — за межі множини $\mathbb{Z}$, проте виконання будь-якої із чотирьох арифметичних дій з раціональними числами не виводить результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Ви ознайомилися з новою дією — добуванням квадратного кореня. Виникає природне запитання: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є раціональним числом? Іншими словами, чи може дія добування квадратного кореня з раціонального числа вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$?

Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Оскільки $2 > 0$, то це рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ (рис. 27). Проте *не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює* 2 (доведення цього факту ви можете знайти в рубриці «Коли зроблено уроки» в оповіданні «Відкриття ірраціональності»), тобто числа $\sqrt{2}$ та $-\sqrt{2}$ не є раціональними. Ці числа є прикладами **ірраціональних чисел** (префікс «ір» означає заперечення).

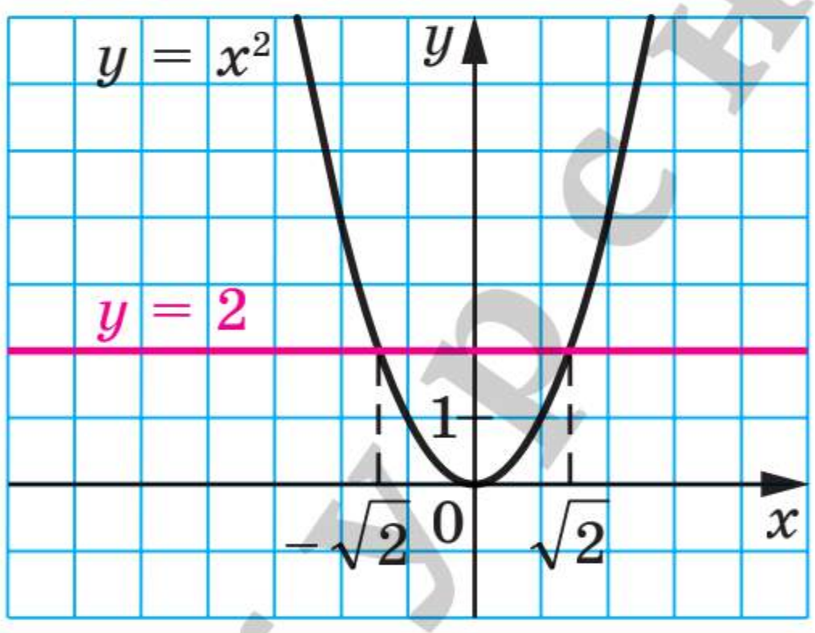


Рис. 27

Отже, дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а отже, й у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді **нескінченних неперіодичних десяткових дробів.**

Наприклад, за допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688724209 7\ldots.$$

Числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ — це не перші ірраціональні числа, з якими ви стикаєтеся. Число π, яке дорівнює відношенню довжини кола до діаметра, також є ірраціональним:

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279502884197169399 37\ldots.$$

Ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Наприклад, число 0,1010010001000010000010000001... (після коми записано послідовно степені числа 10) є ірраціональним. Справді, якщо припустити, що розглядуваний десятковий дріб має період, який складається з n цифр, то з деякого місця цей період повністю складатиметься з нулів, інакше кажучи, починаючи із цього місця, у записі не повинно бути жодної одиниці, що суперечить конструкції числа.

Разом множини ірраціональних і раціональних чисел утворюють **множину дійсних чисел.** Її позначають буквою $\mathbb{R}$ (першою буквою латинського слова *realis* — «реальний», «той, що існує насправді»).

Тепер «ланцюжок» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ можна продовжити:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Зв'язок між числовими множинами, які розглянуто в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 28.

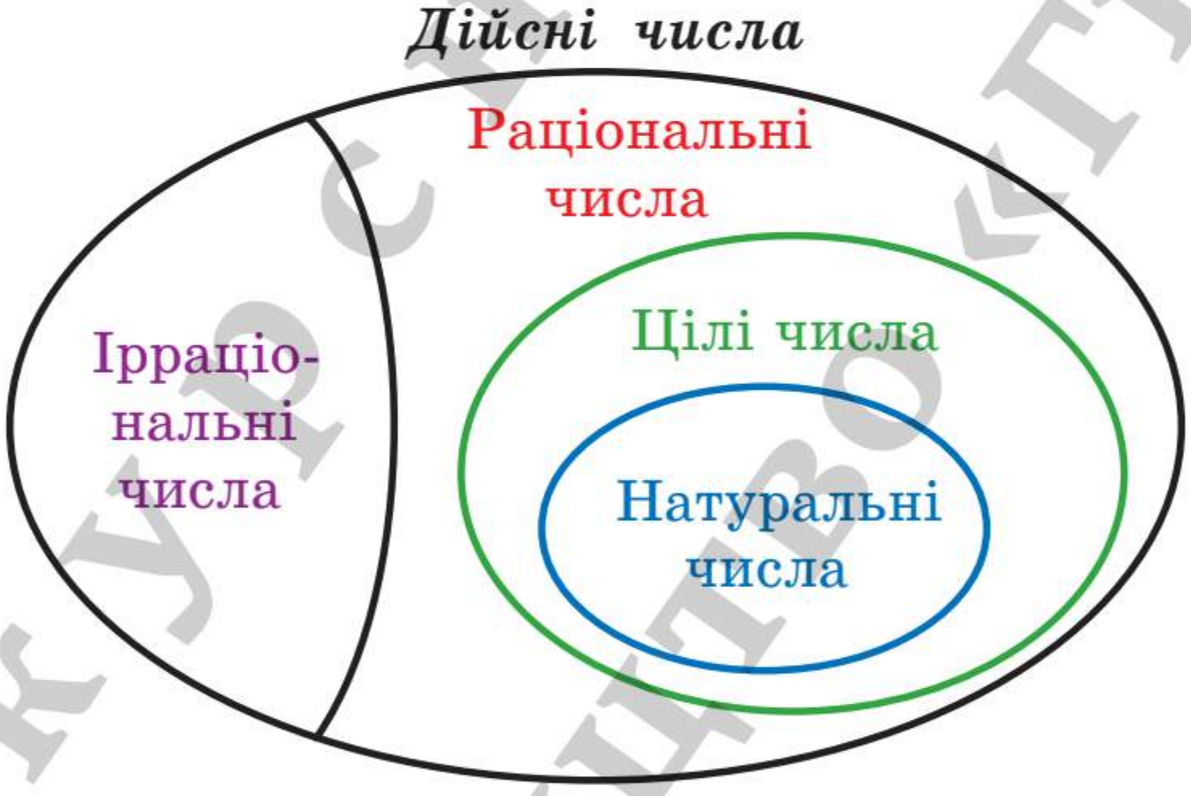


Рис. 28

Довжину будь-якого відрізка можна виразити дійсним числом. Цей факт дає змогу встановити зв'язок між множиною $\mathbb{R}$ і множиною точок координатної прямої. Точці O, початку відліку, поставимо у відповідність число 0. Кожній точці A координатної прямої, відмінній від точки O, поставимо у відповідність єдине число, яке дорівнює довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена праворуч від точки O, і число, протилежне довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена ліворуч від точки O. Також зрозуміло, що кожне дійсне число є відповідним єдиній точці координатної прямої.

Над дійсними числами можна виконувати чотири арифметичні дії (крім ділення на нуль), у результаті отримуватимемо дійсне число. Цим діям притаманні звичні для вас властивості:

$a + b = b + a$	Переставна властивість додавання
$ab = ba$	Переставна властивість множення
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сполучна властивість додавання
$(ab)\ c = a\ (bc)$	Сполучна властивість множення
$a\ (b + c) = ab + ac$	Розподільна властивість множення

Дійсні числа можна порівнювати, використовуючи правила порівнювання десяткових дробів, тобто порівнювання цифр у відповідних розрядах. Наприклад, $7{,}853126\ldots < 7{,}853211\ldots$.

Будь-яке додатне дійсне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне дійсне число. Будь-яке від'ємне дійсне число менше від нуля. Із двох від'ємних дійсних чисел більшим є те, у якого модуль менший.

Якщо позначити на координатній прямій два дійсних числа, то менше з них буде розміщено ліворуч від більшого.

Знаходячи довжину кола та площу круга, ви користувалися **наближеним значенням числа** π (наприклад, $\pi \approx 3{,}14$). Аналогічно під час розв'язування практичних задач, де необхідно виконати дії з дійсними числами, за потреби ці числа замінюють їхніми наближеними значеннями. Наприклад, для числа $\sqrt{2}$ можна скористуватися такими наближеними рівностями: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ або $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Першу з них називають наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за нестачею з точністю до $0{,}001$, друге — наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за надлишком з точністю до $0{,}001$.

На закінчення наголосимо, що з будь-якого невід'ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь і в результаті цієї дії отримати дійсне число. Отже, дія добування квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини $\mathbb{R}$.

1. Які числа утворюють множину цілих чисел? **2.** Якою буквою позначають множину цілих чисел? **3.** Які числа утворюють множину раціональних чисел? **4.** Якою буквою позначають множину раціональних чисел? **5.** У вигляді якого відношення можна подати кожне раціональне число? **6.** Як пов'язані між собою раціональні числа та нескінченні періодичні десяткові дроби? **7.** Як називають числа, що не є раціональними? **8.** Які

множини утворюють разом множину дійсних чисел? **9.** Якою буквою позначають множину дійсних чисел? **10.** Як взаємопов'язані числові множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

ВПРАВИ

441.° Яке з наведених тверджень хибне:
1) -3 — дійсне число;
2) -3 — раціональне число;
3) -3 — ціле число;
4) -3 — натуральне число?

Обговоріть ваші відповіді в класі.

442.° Як ви вважаєте, чи є правильним твердження:
1) $1 \in \mathbb{N}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$;
4) $1 \in \mathbb{R}$;
5) $-2{,}3 \in \mathbb{N}$;
6) $-2{,}3 \in \mathbb{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

Обговоріть ваші відповіді в класі.

443.° Чи є правильним твердження:
1) $0 \in \mathbb{N}$;
2) $0 \notin \mathbb{Z}$;
3) $0 \in \mathbb{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$?

444.° Як ви вважаєте, які з наведених тверджень є правильними:
1) будь-яке натуральне число є цілим;
2) будь-яке натуральне число є раціональним;
3) будь-яке натуральне число є дійсним;
4) будь-яке раціональне число є цілим;
5) будь-яке дійсне число є раціональним;
6) будь-яке раціональне число є дійсним;
7) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
8) будь-яке дійсне число є або раціональним, або ірраціональним?

Обговоріть ваші відповіді в класі.

445.° Які з даних нескінченних дробів є записами раціональних чисел, а які — ірраціональних:
1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 0,20200200020... (кількість нулів між сусідніми двійками послідовно збільшується на 1)?

446.° Порівняйте:
1) $6{,}542\ldots$ і $6{,}452\ldots$; 2) $-24{,}064\ldots$ і $-24{,}165\ldots$.

447.° Порівняйте:
1) $0{,}234\ldots$ і $0{,}225\ldots$; 2) $-1{,}333\ldots$ і $-1{,}345\ldots$.

448.° За допомогою калькулятора знайдіть наближене значення числа $\sqrt{3}$ з точністю до 0,01: 1) за нестачею; 2) за надлишком.

449.° За допомогою калькулятора знайдіть наближене значення числа $\sqrt{5}$ з точністю до 0,01: 1) за нестачею; 2) за надлишком.

450.• Укажіть яке-небудь значення a, при якому рівняння $x^2 = a$:
1) має два раціональних корені;
2) має два ірраціональних корені;
3) не має коренів.

Порівняйте ваші відповіді з тими, які надали однокласники й однокласниці.

451.• Порівняйте числа:
1) $\frac{43}{7}$ і 6,12; 4) $-2{,}(36)$ і $-2{,}36$;
2) $3{,}(24)$ і $3{,}24$; 5) $7{,}(18)$ і $7{,}(17)$.
3) π і $3{,}(14)$;

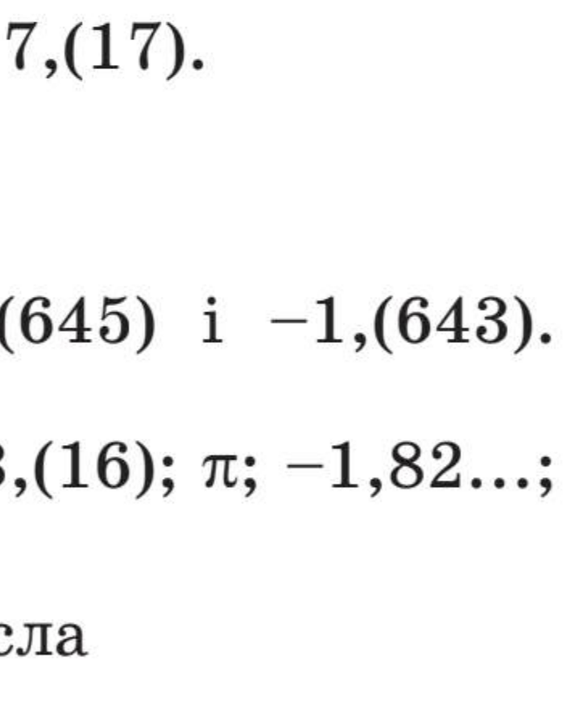
452.• Порівняйте числа:
1) $\frac{1}{6}$ і 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ і 0,77; 3) $-1{,}(645)$ і $-1{,}(643)$.

453.• Запишіть у порядку спадання числа $3{,}(16)$; π; $-1{,}82\ldots$; $-0{,}08\ldots$; $2{,}(136)$.

454.• Запишіть у порядку зростання числа

$$1{,}57\ \textbf{Щ},\ 1{,}571\ldots\ \textbf{Н},\ 1\frac{58}{99}\ \textbf{О},\ \frac{\pi}{2}\ \textbf{Е},$$
$$1{,}(56)\ \textbf{Ю},\ 1{,}(572)\ \textbf{К}.$$

Букви, що відповідають даним числам, утворюють прізвище видатної української програмістки і кібернетикині, докторки фізико-математичних наук, авторки однієї з перших у світі мов програмування високого рівня. Знайдіть в інтернеті відповіді на такі запитання.



Корпус Вулиця Гімназія

1) У якому році науковиця створила мову програмування?
2) Як називається ця мова програмування?
3) У яких наукових закладах України вона працювала?
4) Яким орденом незалежної України її було нагороджено?

455." Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональними числами.

456." Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

457." Як ви вважаєте, чи є правильним твердження:
1) сума будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
2) добуток будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
3) добуток будь-якого ірраціонального числа та будь-якого раціонального числа є ірраціональним числом?

Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

458. Станом на 2020 р. в Україні було три міста з населенням понад 1 млн осіб. Користуючись інформацією, поданою в таблиці, установіть, у якому із цих міст щільність населення[1] була найбільшою.

Місто	Населення, млн осіб	Територія, км^2
Київ	2,967	836
Харків	1,443	350
Одеса	1,018	162

Пропонуємо вам створити групу з ваших однокласників і однокласниць для участі в проєкті з дослідження щільності населення в столицях країн Європейського союзу. Порівняйте отримані дані та побудуйте стовпчасту діаграму, яка демонструватиме їх для п'яти більш населених столиць. Радимо для побудови діаграми скористатися відповідними комп'ютерними програмами, такими як *Excel*, *Word*, *Visio*. За потреби проконсультуйтеся в учителів / учительок інформатики та географії.

---

[1] Щільність населення — це кількість жителів на 1 км^2 території.

459. У кожному під'їзді на кожному поверсі дев'ятиповерхового будинку міститься по вісім квартир. У якому під'їзді та на якому поверсі розташована квартира № 186?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

460. Натуральні числа a і b є такими, що a — парне число, а b — непарне. Значення якого з даних виразів не може бути натуральним числом:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

461. Тракторист мав засіяти поле за 8 днів. Проте через погану погоду він засіював щодня на 3 га менше від норми й тому виконав роботу за 10 днів. Яка площа поля?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

462. Знайдіть значення виразу:

1) $|-3{,}5|-|2{,}6|$;
2) $|-9{,}6|-|-32|$.

463. Модуль якого числа дорівнює 6?

464. Для яких чисел виконується рівність:

1) $|a|=a$; 3) $|a|=|-a|$;
2) $|a|=-a$; 4) $|a|=-|a|$?

465. Для яких чисел одночасно виконуються обидві рівності $|a|=a$ і $|a|=-a$?

466. Знайдіть значення кожного з виразів a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-8$ і при $a=7$. Зробіть висновок.

467. Відомо, що $a>0$, $c<0$. Порівняйте з нулем значення виразу: 1) a^3c^4; 2) ac^5.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

468. У роті 100 солдатів. Щоночі на чергування виходять три солдати. Чи можна так організувати чергування, щоб через деякий час кожний солдат побував на чергуванні з кожним з решти солдатів рівно один раз?

Комунальний заклад «Київський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Київської обласної ради Видавництво

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Відкриття ірраціональності

У п. 14, розв'язуючи графічно рівняння $x^2 = 2$, ми встановили, що довжина кожного з відрізків OA і OB дорівнює $\sqrt{2}$ (рис. 29). Покажемо, що число $\sqrt{2}$ ірраціональне.

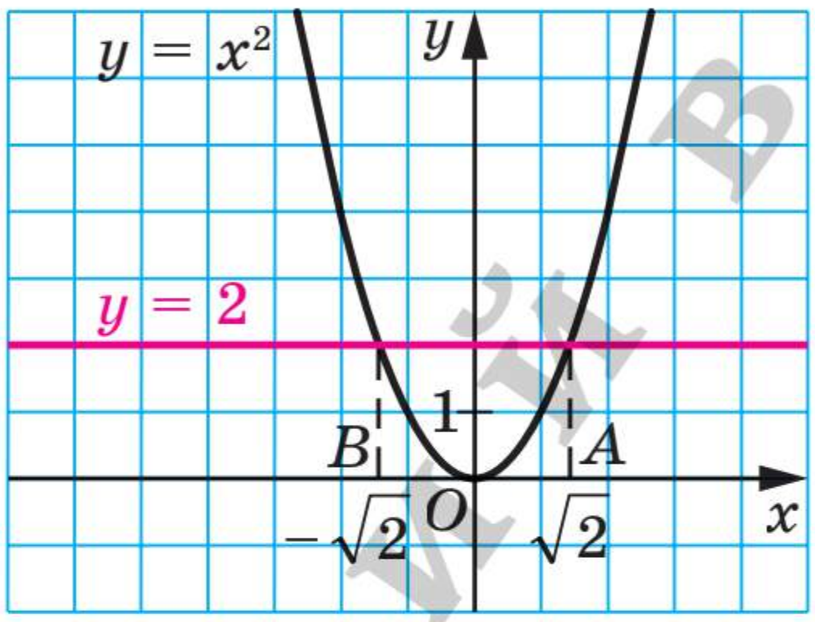


Рис. 29

Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. Маємо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тоді $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$; $2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.

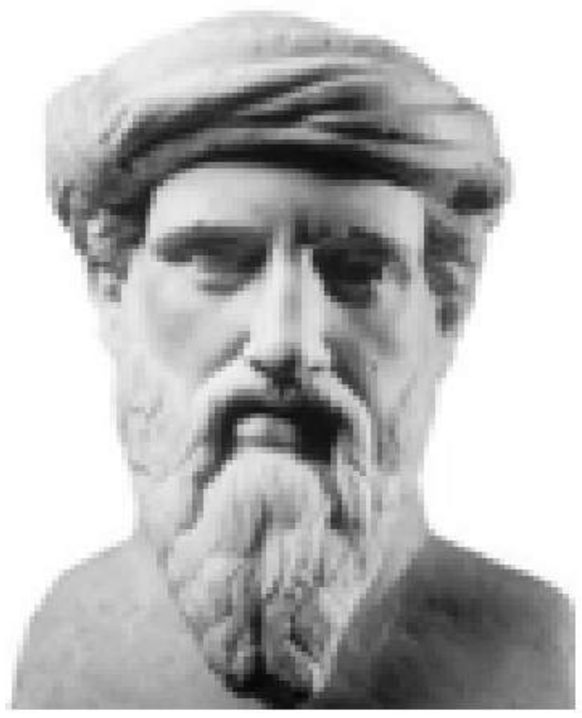
З останньої рівності випливає, що число m^2 парне. А це означає, що парним є і число m. Тоді $m = 2k$, де k — деяке натуральне число. Маємо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що число n^2, а отже, і число n парні.

Таким чином, чисельник і знаменник дробу $\frac{m}{n}$ — парні числа. Отже, цей дріб є скоротним. Отримали суперечність.

Наведений приклад показує, що існують відрізки (у нашому випадку це відрізки OA і OB на рисунку 29), довжини яких не можна виразити раціональними числами, тобто *для вимірювання відрізків раціональних чисел недостатньо*.

Цей факт було відкрито в школі видатного давньогрецького вченого Піфагора.

НАКУ РСЕ «Видавництво «Гімназія»



Піфагор
(бл. 570 — бл. 500 р. до н. е.)

Спочатку піфагорійці вважали, що для будь-яких відрізків AB і CD завжди можна знайти такий відрізок MN, який у кожному з них вкладається ціле число разів. Звідси випливало, що відношення довжин будь-яких двох відрізків виражається відношенням цілих чисел, тобто раціональним числом.

Наприклад, на рисунку 30 маємо: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Відрізок MN називають **спільною мірою** відрізків AB і CD.

Якщо для відрізків існує спільна міра, то їх називають **спільномірними**. Наприклад, відрізки AB і CD (рис. 30) є спільномірними.

Отже, давньогрецькі вчені вважали, що будь-які два відрізки є спільномірними. А із цього випливало, що довжину будь-якого відрізка можна виразити раціональним числом.

Справді, нехай деякий відрізок AB вибрано за одиничний. Тоді для відрізка AB і будь-якого іншого відрізка CD існує відрізок завдовжки e, який є їхньою спільною мірою. Отримуємо: $AB = ne$, $CD = me$, де m і n — деякі натуральні числа. Звідси $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Оскільки $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

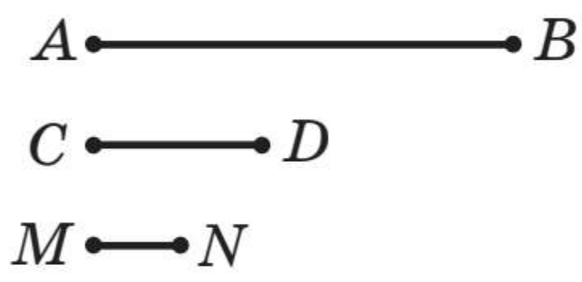


Рис. 30

Проте самі ж піфагорійці зробили видатне відкриття. Вони довели, що діагональ і сторона квадрата неспільномірні, тобто якщо сторону квадрата взяти за одиницю, то довжину діагоналі квадрата виразити раціональним числом не можна.

Для доведення розглянемо довільний квадрат $ABCD$ та візьмемо його сторону за одиницю довжини. Тоді його площа дорівнює $AB^2 = 1$. На діагоналі AC побудуємо квадрат $ACEF$ (рис. 31). Зрозуміло, що площа квадрата $ACEF$ у 2 рази більша за площу квадрата $ABCD$. Звідси $AC^2 = 2$, тобто $AC = \sqrt{2}$. Отже, довжина діагоналі AC не може бути виражена раціональним числом.

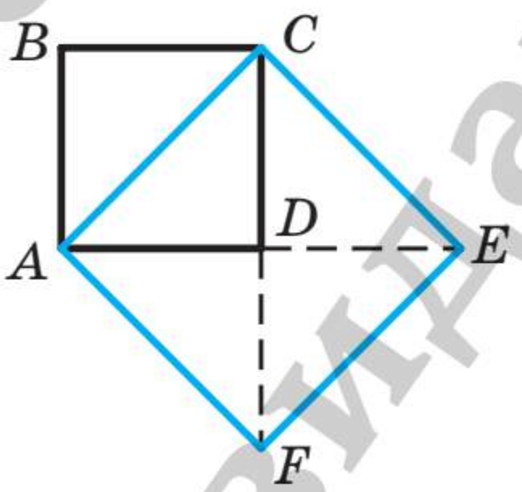


Рис. 31

Це відкриття змінило один із фундаментальних постулатів давньогрецьких

учених, а саме: відношення будь-яких двох величин виражається відношенням цілих чисел.

Існує легенда про те, що піфагорійці тримали відкриття ірраціональних чисел у найсуворішій таємниці, а людину, яка розголосила цей факт, покарали боги: вона загинула під час корабельної катастрофи.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ ірраціональне.
2. Доведіть, що коли натуральне число n не є квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ ірраціональне.

15. Властивості арифметичного квадратного кореня

Легко перевірити, що $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{1{,}4^2}=1{,}4$, $\sqrt{0^2}=0$. Може здатися, що при будь-якому значенні a виконується рівність $\sqrt{a^2}=a$. Проте це не так. Наприклад, рівність $\sqrt{(-5)^2}=-5$ є неправильною, оскільки $-5<0$. Насправді $\sqrt{(-5)^2}=5$. Також можна переконатися, що, наприклад, $\sqrt{(-7)^2}=7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2}=2{,}8$. Узагалі, є справедливою така теорема.

Теорема 15.1:

Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt{a}=b$, треба показати, що $b\geqslant 0$ і $b^2=a$. Маємо: $|a|\geqslant 0$ при будь-якому a. Також з означення модуля випливає, що $|a|^2=a^2$. ◀

Наступна теорема узагальнює доведений факт.

Теорема 15.2 (арифметичний квадратний корінь із степеня):

Для будь-якого дійсного числа a та будь-якого натурального числа n виконується рівність

$$\sqrt{a^{2n}}=|a^n|.$$

Корпус Книга Видавництво

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 15.1. Проведіть це доведення самостійно.

Теорема 15.3 (арифметичний квадратний корінь з добутку):

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Крім того, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$. Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває тільки невід'ємних значень, і його квадрат дорівнює ab. ◀

Цю теорему можна узагальнити для добутку трьох і більше множників. Наприклад, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Теорема 15.4 (арифметичний квадратний корінь із дробу):

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 15.3. Проведіть це доведення самостійно.

Зрозуміло, що з двох квадратів із площами S_1 і S_2 (рис. 32) більшу сторону має той, у якого площа більша, тобто якщо $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Це очевидне міркування ілюструє таку властивість арифметичного квадратного кореня:

для будь-яких невід'ємних чисел a_1 і a_2 таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

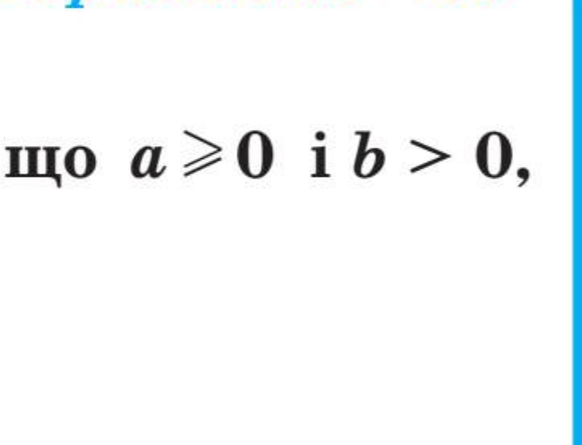


Рис. 32

НАЦІОНАЛЬНЕ ВИДАВНИЦТВО «ГЕНЕЗА»

ПРИКЛАД 1. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$; 3) $\sqrt{0,81\cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44$.

3) $\sqrt{0,81\cdot 225} = \sqrt{0,81}\cdot\sqrt{225} = 0,9\cdot 15 = 13,5$.

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$. ◀

ПРИКЛАД 2. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Розв'язання. 1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, отримаємо:

$$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18\cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Замінивши частку коренів коренем із частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$ ◀

ПРИКЛАД 3. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, якщо $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Розв'язання. 1) За теоремою про арифметичний квадратний корінь із степеня маємо:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо: $\sqrt{9a^6} = 3\cdot|a^3|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{9a^6} = 3\cdot|a^3| = -3a^3.$$

3) Маємо: $\sqrt{m^2n^2} = |m|\cdot|n|$. Оскільки за умовою $m \geqslant 0$, то $|m| = m$. Оскільки $n \leqslant 0$, то $|n| = -n$.

Отже, $|m|\cdot|n| = m\cdot(-n) = -mn$.

4) Маємо: $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$.

Оскільки $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$. ◀

Комплект курсу «Алгебра» для 8 класу. Видавництво «Гімназія»

ПРИКЛАД 4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{37^2-12^2}$; 2) $\sqrt{8\cdot 648}$; 3) $\sqrt{16{,}9\cdot 0{,}4}$.

Розв'язання. 1) Перетворивши підкореневий вираз за формулою різниці квадратів, отримуємо:

$$\sqrt{37^2-12^2}=\sqrt{(37-12)(37+12)}=\sqrt{25\cdot 49}=5\cdot 7=35.$$

2) Подавши підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел, отримуємо:

$$\sqrt{8\cdot 648}=\sqrt{8\cdot 2\cdot 324}=\sqrt{16\cdot 324}=4\cdot 18=72.$$

3) $\sqrt{16{,}9\cdot 0{,}4}=\sqrt{169\cdot 0{,}04}=13\cdot 0{,}2=2{,}6$. ◀

ПРИКЛАД 5. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x^2}+x$.

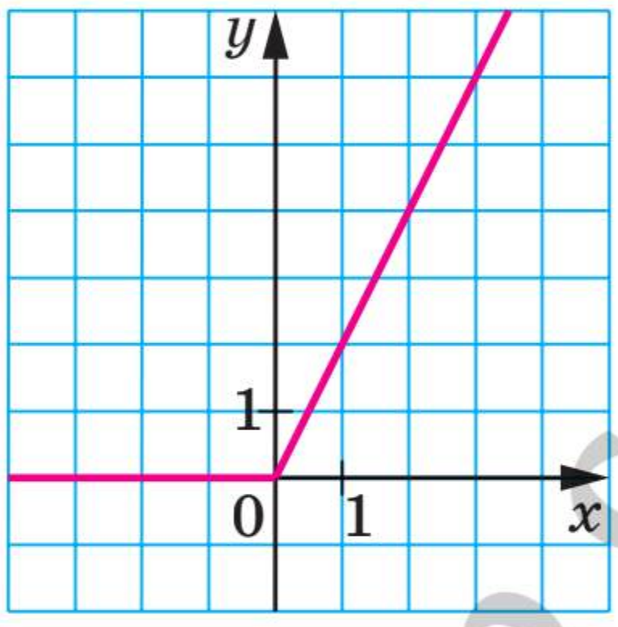


Рис. 33

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x^2}=|x|$, то $y=|x|+x$.

Якщо $x\geqslant 0$, то $y=x+x=2x$.

Якщо $x<0$, то $y=-x+x=0$.

Отже, $y=\begin{cases}2x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

Графік функції зображено на рисунку 33. ◀

1. Якому виразу тотожно дорівнює вираз $\sqrt{a^2}$? **2.** Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із степеня. **3.** Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь з добутку. **4.** Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із дробу. **5.** Відомо, що невід'ємні числа a_1 і a_2 такі, що $a_1 > a_2$. Порівняйте значення виразів $\sqrt{a_1}$ і $\sqrt{a_2}$.

ВПРАВИ

469.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}4^2}$; 4) $3\sqrt{1{,}2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1{,}8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;

3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$?

Порівняйте ваші відповіді з відповідями однокласників і однокласниць.

Книга вилучена з видавництва «Гімназія»

470.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 4{,}6;\ -18{,}6;$

2) $\sqrt{b^4}$, якщо $b = -3;\ 1{,}2;$

3) $0{,}1\sqrt{c^6}$, якщо $c = -2;\ 5.$

471.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{9 \cdot 25}$;

2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$;

3) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$;

4) $\sqrt{400 \cdot 1{,}44}$;

5) $\sqrt{0{,}09 \cdot 0{,}04}$;

6) $\sqrt{6{,}25 \cdot 0{,}16}$;

7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$;

8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0{,}36}$;

10) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}81 \cdot 2500}$;

11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;

12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$;

14) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;

15) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$.

472.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{36 \cdot 81}$;

2) $\sqrt{900 \cdot 49}$;

3) $\sqrt{16 \cdot 0{,}25}$;

4) $\sqrt{9 \cdot 1{,}69}$;

5) $\sqrt{0{,}36 \cdot 1{,}21}$;

6) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$;

7) $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$;

8) $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$;

9) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}04 \cdot 1600}$;

10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

11) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$;

12) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$?

473.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$;

2) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$;

3) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$;

4) $\sqrt{0{,}009} \cdot \sqrt{1000}$;

5) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0{,}18}$;

6) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$;

7) $\sqrt{2{,}4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;

8) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;

9) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

Комунальний заклад «Рівненський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти»
Видавництво «Інтелект»

474.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12{,}1}$;
4) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{50}$;
5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2{,}8}$;
6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

475.° Знайдіть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$;
3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$;
4) $\frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$;
5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;
6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;
7) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

476.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$;
3) $\frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}7}}$;
4) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

477.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2}=a$;
2) $\sqrt{a^2}=-a$?

Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

478.• При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;
2) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$;
3) $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$?

Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

479.• Знайдіть значення виразу, подавши попередньо підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел:

1) $\sqrt{18\cdot 32}$;
2) $\sqrt{8\cdot 98}$;
3) $\sqrt{3{,}6\cdot 14{,}4}$;
4) $\sqrt{75\cdot 48}$;
5) $\sqrt{288\cdot 50}$;
6) $\sqrt{4{,}5\cdot 72}$;
7) $\sqrt{2{,}7\cdot 1{,}2}$;
8) $\sqrt{80\cdot 45}$;
9) $\sqrt{33\cdot 297}$.

480.• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18\cdot 200}$;
2) $\sqrt{3{,}6\cdot 0{,}4}$;
3) $\sqrt{14{,}4\cdot 0{,}9}$;
4) $\sqrt{13\cdot 52}$;
5) $\sqrt{12{,}5\cdot 32}$;
6) $\sqrt{108\cdot 27}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «РАНОК»

481.• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{41^2-40^2}$; 3) $\sqrt{8{,}5^2-7{,}5^2}$; 5) $\sqrt{\dfrac{155^2-134^2}{84}}$;

2) $\sqrt{145^2-144^2}$; 4) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$; 6) $\sqrt{\dfrac{139^2-86^2}{98{,}5^2-45{,}5^2}}$.

482.• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$; 2) $\sqrt{98{,}5^2-97{,}5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2-164^2}}$.

483.• Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня: 1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

484.• Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня: 1) $1{,}2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

485.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$;

3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, якщо $k \leqslant 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, якщо $y \geqslant 0$;

8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1{,}2x\sqrt{64x^{18}}$, якщо $x \leqslant 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$;

11) $-0{,}5m^5\sqrt{1{,}96m^6n^8}$, якщо $m \leqslant 0$.

Як ви думаєте, чому в прикладі 5) не вказано знак значень змінної c, а в прикладах 7), 10) і 11) вказано знак значень лише однієї змінної? Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

486.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0{,}81d^6}$, якщо $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;

4) $-0{,}1\sqrt{100z^{10}}$, якщо $z \geqslant 0$;

Видавництво «Ранок»

5) $\sqrt{p^6q^8}$, якщо $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$.

487.$^{\bullet\bullet}$ Які з наведених рівностей виконуються при всіх дійсних значеннях a:

1) $\sqrt{a^2} = a$;

2) $\sqrt{a^4} = a^2$;

3) $\sqrt{a^6} = a^3$;

4) $\sqrt{a^8} = a^4$?

Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

488.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;

2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

3) $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$;

4) $\sqrt{a^2} = (\sqrt{-a})^2$?

Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

489.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, якщо $x \leqslant 0$;

2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;

3) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$.

490.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - 2x$, якщо $x \geqslant 0$;

2) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

491.* При якому значенні x виконується рівність:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$;

2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$;

3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$?

492.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = x + 8$;

2) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

Поцікавтесь в інтернеті (в учителів / учительок або знайомих), що таке націнки і знижки та розв'яжіть наступні три задачі.

493. Крамниця закуповує цукерки на кондитерській фабриці за гуртовою ціною 125 грн за одну коробку та продає з націнкою 40 %. У крамниці коробок із цукерками було

продано на 70 000 грн. Скільки коробок цукерок було продано?

494. На час різдвяного розпродажу, що триває з 20 по 31 грудня, у магазині одягу встановили знижку в розмірі 35 % на светри старої колекції.

1) Скільки коштує светр під час розпродажу, якщо 19 грудня його ціна складала 3360 грн?
2) Роздивляючись придбаний светр, покупець випадково знайшов цінник за 10 грудня, за яким вартість светра становила 2400 грн. Як ви думаєте, чому ціна на светр зросла в період з 10 по 19 грудня?
3) Скільки відсотків становила знижка на светр під час різдвяного розпродажу, якщо за початкову взяти ціну светра 10 грудня?

495. У магазині проходить акція: купуючи дві однакові пляшки соняшникової олії, третю таку пляшку можна придбати зі знижкою 30 %. **Яку найбільшу кількість таких пляшок можна придбати, маючи 700 грн, якщо одна пляшка соняшникової олії коштує 60 грн?**

Радимо створити групу з ваших однокласників і однокласниць для роботи над проєктом, у якому ви зможете дізнатися, як працюють націнки та знижки, навчитися виявляти несумлінні знижки.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

496. У таблиці подано інформацію про сумарну кількість медалей, здобутих українськими школярами та школярками протягом 2020–2024 рр. на Міжнародних фізичних олімпіадах. Побудуйте стовпчасту діаграму, що відображає цю інформацію.

Рік	2020	2021	2022	2023	2024
Кількість медалей	2	5	4	5	5

497. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{a^2-5a}{a^2-10a+25}+\frac{25}{a^2-25}\right):\frac{125-a^3}{5+a}$$

при $a=4{,}5$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

498. На дошці записано 102 послідовних натуральних числа. Чи можна розбити їх на дві групи так, щоб сума чисел у кожній групі була простим числом (у кожній групі має бути не менше ніж два числа)?

16. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені



Користуючись теоремою про арифметичний квадратний корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$. Маємо:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під знака кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***. У даному випадку було внесено під знак кореня множник 4.

ПРИКЛАД 1. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a < 0$.

Розв'язання. 1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є квадратом раціонального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}$.

3) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то з умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |\, b^{17} \,|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |\, b^{17} \,|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

5) З умови випливає, що $a^2 > 0$. Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то отримуємо, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab\sqrt{b}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2. Внесіть множник під знак кореня:

1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}.$$

4) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді

$$c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$; 3) $\left(7 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right)$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} =$$

$$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}\,(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$.

3) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена й добуток різниці та суми двох виразів), отримаємо:

$$\left(7 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right) = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2 -$$

$$-\left(\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 4. Розкладіть на множники вираз: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, якщо $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Розв'язання. 1) Подавши даний вираз у вигляді різниці квадратів, отримаємо: $a^2 - 2 = a^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right)$.

2) Оскільки за умовою $b \geqslant 0$, то

$$b - 4 = \left(\sqrt{b}\right)^2 - 4 = \left(\sqrt{b} - 2\right)\left(\sqrt{b} + 2\right).$$

Видавництво «Ранок»

3) Застосуємо формулу квадрата різниці:

$$9c-6\sqrt{5c}+5=\left(3\sqrt{c}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{c}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(3\sqrt{c}-\sqrt{5}\right)^2.$$

4) Маємо: $a+\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$.

5) $\sqrt{3}+6=\sqrt{3}+2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{3}\right)$.

6) $\sqrt{35}-\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$. ◀

ПРИКЛАД 5. Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

3) $\dfrac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$, якщо $a>0$, $b>0$.

Розв'язання. 1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3.$

3) Оскільки за умовою $a>0$ і $b>0$, то чисельник і знаменник даного дробу можна розкласти на множники й отриманий дріб скоротити:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$ ◀

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

ПРИКЛАД 6. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Розв'язання. 1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на вираз $5\sqrt{2}+1$, отримуємо:

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}+1\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49}=\frac{2\left(5\sqrt{2}+1\right)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.$$ ◀

ПРИКЛАД 7. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Розв'язання. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$ ◀

ПРИКЛАД 8. Спростіть вираз $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата суми, отримуємо:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\left|3+\sqrt{3}\right|=3+\sqrt{3}.$$ ◀

ВПРАВИ

499.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt{32}$; 4) $\sqrt{54}$; 5) $\sqrt{490}$; 6) $\sqrt{500}$; 7) $\sqrt{275}$; 8) $\sqrt{108}$; 9) $\sqrt{0,72}$; 10) $\sqrt{0,48}$; 11) $\sqrt{450}$; 12) $\sqrt{36\,300}$.

500.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

Копія. Видавництво «Ранок»

501.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{125}$; 7) $-2\sqrt{0,18}$; 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;

2) $\sqrt{24}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 11) $10\sqrt{0,03}$;

3) $\sqrt{20}$; 6) $0,4\sqrt{250}$; 9) $0,8\sqrt{1250}$; 12) $0,7\sqrt{1000}$.

502.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;

2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

503.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;

2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

504.° Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;

2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

505.° Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$; 3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;

506.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$;

2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$;

3) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;

4) $0,4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1,2\sqrt{2,25m}$.

507.° Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;

2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

Контрольний примірник Видавництво «Ранок»

508.• Спростіть вираз:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$;
2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$;
3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$;
4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;
5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0{,}5\sqrt{28}$;
6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0{,}6\sqrt{125}$.

509.• Раціональним чи ірраціональним є значення виразу:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

Обґрунтуйте ваші відповіді та обговоріть їх з однокласниками й однокласницями.

510.• Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$;
2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$;
4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;
5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

511.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}+\sqrt{8}\right)$;
2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$;
3) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

512.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{28}\right)$;
2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4\right)\cdot 3\sqrt{3}$;
4) $\left(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

513.• Виконайте множення:

1) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$;
2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$;
3) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$;
4) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$;
5) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$;
6) $\left(y-\sqrt{7}\right)\left(y+\sqrt{7}\right)$;
7) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;
8) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$;
9) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;
10) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$.

514.• Виконайте множення:

1) $\left(\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-1\right)$;
2) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$;
3) $\left(\sqrt{p}-q\right)\left(\sqrt{p}+q\right)$;
4) $\left(6-\sqrt{13}\right)\left(6+\sqrt{13}\right)$;
5) $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$;
6) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)$;
7) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$;
8) $\left(3-2\sqrt{15}\right)^2$.

515. Чому дорівнює значення виразу:

1) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2-4\sqrt{7}$; 2) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2+6\sqrt{2}$?

516. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-6\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{6}$.

517. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$;

5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

518. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 5) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{30}{\sqrt{15}}$;

519. Розкладіть на множники вираз:

1) a^2-3;
2) $4b^2-2$;
3) $a-9$, якщо $a\geqslant 0$;
4) $m-n$, якщо $m\geqslant 0$; $n\geqslant 0$;
5) $16x-25y$, якщо $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$;
6) $a-2\sqrt{a}+1$;
7) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, якщо $m\geqslant 0$; $n\geqslant 0$;
8) $b+6\sqrt{b}+9$;
9) $3+2\sqrt{3c}+c$;
10) $2+\sqrt{2}$;
11) $6\sqrt{7}-7$;
12) $a-\sqrt{a}$;
13) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;
14) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

Як ви думаєте, чому в деяких прикладах указано знаки значень змінних, а в деяких — не вказано? Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

520. Розкладіть на множники вираз:

1) $15-x^2$;
2) $49x^2-2$;
3) $36p-64q$, якщо $p\geqslant 0$; $q\geqslant 0$;
4) $a-4\sqrt{a}+4$;
5) $a-8b\sqrt{a}+16b^2$;
6) $5+\sqrt{5}$;
7) $\sqrt{3p}-p$;
8) $\sqrt{12}+\sqrt{32}$.

Київський університет імені Бориса Грінченка
Видавництво «Гімназія»

521. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$;
2) $\frac{\sqrt{3}-b}{3-b^2}$;
3) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;
4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
5) $\frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b}$;
6) $\frac{100a^2-9b}{10a+3\sqrt{b}}$;
7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;
8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;
9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;
10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;
11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

522. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;
2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$;
3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$;
4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;
5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$;
6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;
7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;
8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

523. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $\sqrt{5b^2}$, якщо $b \leqslant 0$;
3) $\sqrt{12a^4}$;
4) $\sqrt{c^5}$.

524. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$;
2) $\sqrt{y^9}$.

525. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;
2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;
3) $0{,}7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;
4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;
5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, якщо $a > 0$;
6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

526. Спростіть вираз:

1) $0{,}5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0{,}4\sqrt{75}$;
2) $2{,}5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0{,}07b}$;
3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

КОПІЮВАННЯ ВІДЦАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

527.• Доведіть, що:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$; 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

Як ви думаєте, чи існує спосіб розв'язання цієї задачі, відмінний від вашого? Поцікавтеся, яке розв'язання знайшли ваші однокласники й однокласниці.

528.• Спростіть вираз:

1) $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{27}+2\right)$;

2) $\left(\sqrt{5}-2\right)^2-\left(3+\sqrt{5}\right)^2$;

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

4) $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^2$;

5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

529.• Знайдіть значення виразу:

1) $\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{8}-2\right)$;

2) $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2+\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$;

3) $\left(10-4\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

530.• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;

3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

Як ви думаєте, чому в прикладі 3) вказано знаки значень змінних, а в інших прикладах не вказано? Обґрунтуйте вашу думку та обговоріть її з однокласниками й однокласницями.

531.• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;

2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

Київ видавничий центр «Академія»

532.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$;
3) $\frac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$;
5) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;
2) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;
4) $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$;
6) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

533.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$;
2) $\frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$;
3) $\frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;
4) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

534.• Доведіть рівність:

1) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;
2) $\frac{2}{3\sqrt{2}+4}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;
3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$.

535.• Доведіть, що значенням виразу є раціональне число:

1) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}+\frac{6}{3-2\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

536.• Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;
2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;
3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;
4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;
5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;
6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$.

537.• Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;
2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;
3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;
4) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$.

ГО ВидавН

538. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$;
4) $\sqrt{m^7n^7}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$;
6) $\sqrt{64a^2b^9}$, якщо $a > 0$;
7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, якщо $b < 0$;
8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, якщо $m > 0$, $n < 0$.

Чи викликало у вас здивування, чому в прикладі 2) наявне обмеження $a \neq 0$? Обговоріть цю ситуацію в класі.

539. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;
2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, якщо $b \neq 0$;
3) $\sqrt{49a^2b}$, якщо $a < 0$;
4) $\sqrt{a^9b^9}$;
5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, якщо $y < 0$;
6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, якщо $m > 0$, $n > 0$.

540. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{3}$;
2) $b\sqrt{-b}$;
3) $c\sqrt{c^5}$;
4) $m\sqrt{n}$, якщо $m \geqslant 0$;
5) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $x \leqslant 0$;
6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;
7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;
8) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geqslant 0$.

541. Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $p\sqrt{p^3}$;
4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leqslant 0$;
5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;
6) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b > 0$.

542. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1}$;
2) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$;

4) $\dfrac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\dfrac{1}{a+8\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

543.•• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

544.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

545.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

546.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

547.* Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

548.* Доведіть, що

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

549.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

550. Кількість пошитих за місяць підприємством суконь відноситься до кількості пошитих спідниць як 2 : 7. Якому з даних чисел може дорівнювати сумарна кількість суконь і спідниць, пошитих цим підприємством за місяць:
1) 80; 2) 93; 3) 108; 4) 120?

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

551. На діаграмі (рис. 34) наведено інформацію про кількість проданих ноутбуків протягом п'яти місяців. На скільки відсотків кількість проданих у червні ноутбуків менша від середньої кількості проданих за місяць ноутбуків?

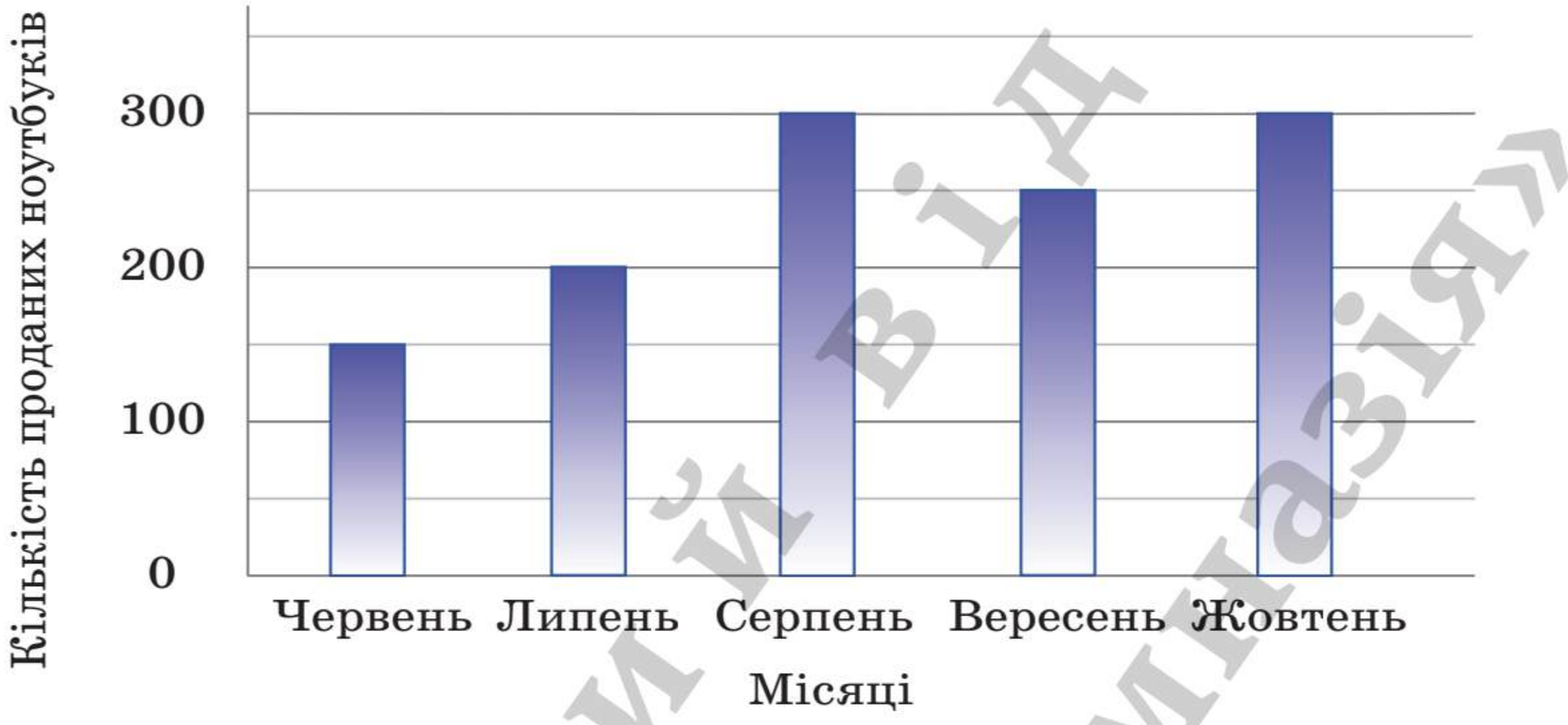


Рис. 34

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

552. Робітниця мала виготовляти щодня 12 деталей. Однак вона виготовляла щодня 15 деталей, і вже за 5 днів до кінця строку роботи їй залишилося виготовити 30 деталей. Скільки деталей мала виготовити робітниця?

553. У саду 60 % дерев становлять вишні та сливи, із них 30 % — сливи. Який відсоток усіх дерев саду становлять сливи?

554. Знайдіть значення виразу $\dfrac{(a^{-3})^3}{a^{-2}\cdot a^{-5}}$ при $a=\dfrac{1}{3}$.

555. Число a — додатне, а число b — від'ємне. Який з даних виразів набуває найбільшого значення:
1) a^2b; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab; 5) $-a^2b$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

556. Відомо, що в деякому класі на «добре» та «відмінно» вчаться не менш ніж 95,5 % і не більше ніж 96,5 % учнів та учениць. Яка найменша кількість учнів та учениць може навчатися в цьому класі?

Комунальний вид. «Гімназія»

17. Функція $y=\sqrt{x}$ та її графік

Якщо площа квадрата дорівнює x, то його сторону y можна знайти за формулою $y=\sqrt{x}$. Зміна площі x квадрата спричиняє зміну його сторони y.

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y=\sqrt{x}$ задає функцію.

Оскільки у виразі $\sqrt{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі невід'ємні числа, то областю визначення функції $y=\sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел.

Вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної функції.

Покажемо, що функція $y=\sqrt{x}$ може набувати будь-яких невід'ємних значень, наприклад 7,2.

Справді, існує таке значення аргументу x, що $\sqrt{x}=7{,}2$. Це значення дорівнює $7{,}2^2$. На цьому прикладі ми бачимо, що для будь-якого невід'ємного числа b завжди знайдеться таке значення x, що $\sqrt{x}=b$. Таким значенням аргументу x є число b^2.

Отже, областю значень функції $y=\sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел.

Зазначимо, що коли $x=0$, то $y=0$.

Ураховуючи область визначення та область значень функції $y=\sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розташований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції $y=\sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Видавництво Київ

Позначимо на координатній площині точки, координати $(x; y)$ яких наведено в таблиці (рис. 35).

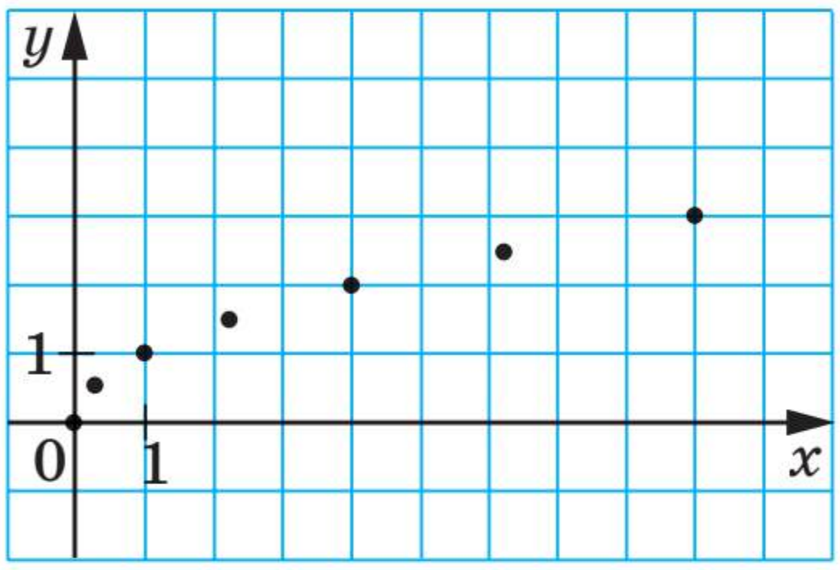


Рис. 35

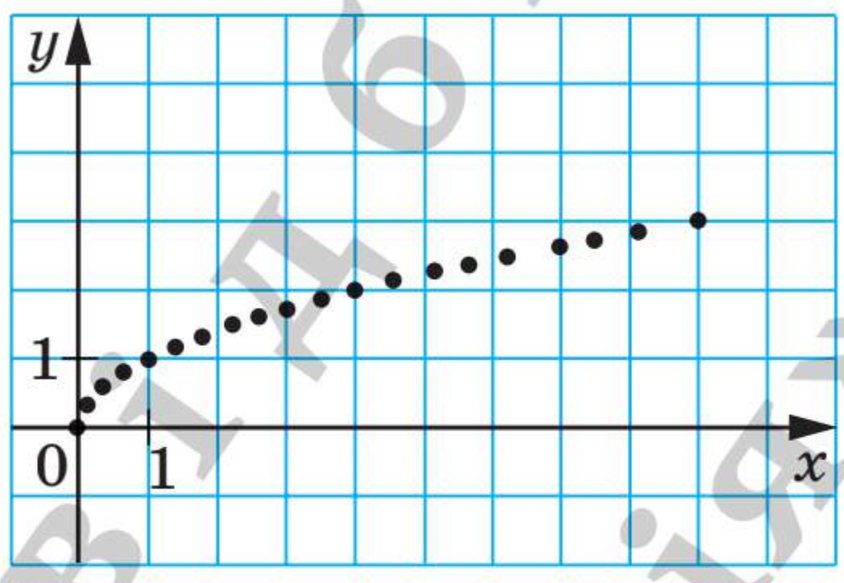


Рис. 36

Чим більше позначити точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, тим менше отримана фігура відрізнятиметься від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 36).

Якби вдалося позначити на координатній площині всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 37. У старших класах буде доведено, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

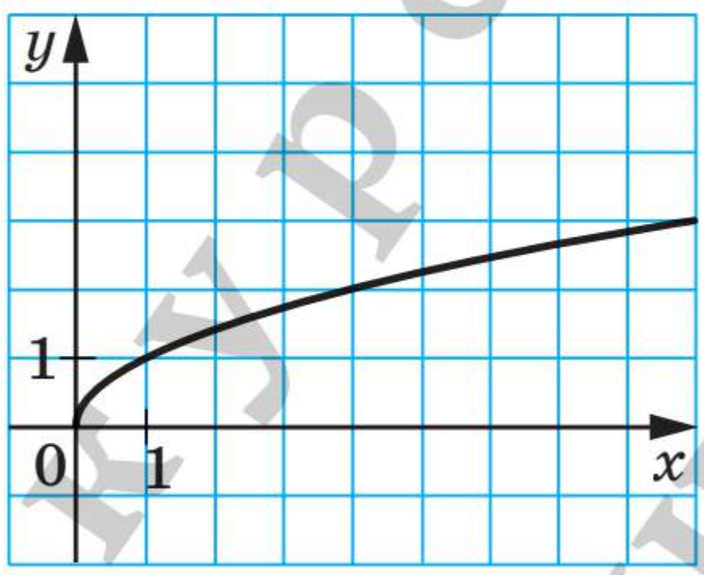


Рис. 37

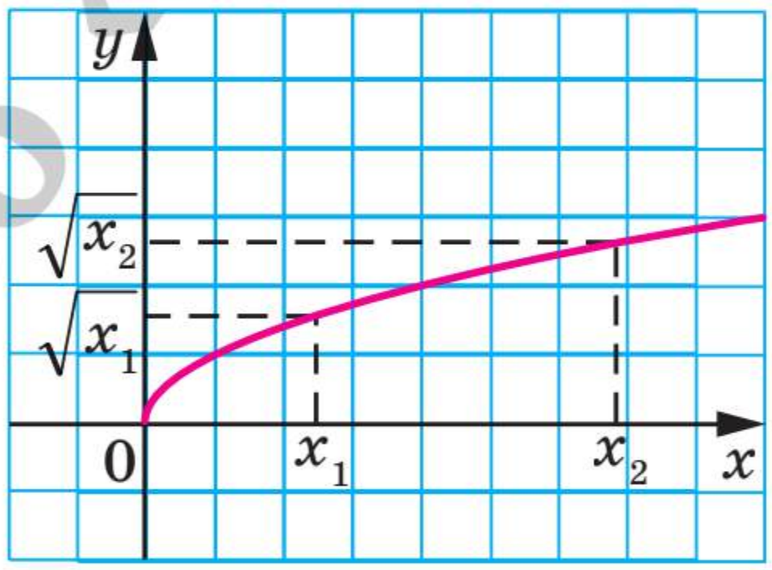


Рис. 38

Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції. Правильним також є обернене твердження: більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто коли $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 38).

---

[1] Урок із побудови графіків функції ви знайдете в електронному додатку до цього пункту.

ЖА1

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt{x}$, вивчені у цьому пункті.

Область визначення	Множина невід'ємних чисел
Область значень	Множина невід'ємних чисел
Графік	Вітка параболи
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Порівняння значень функції	Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$ (рис. 39). Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює 4. Перевірка підтверджує, що число 4 є коренем даного рівняння. ◀

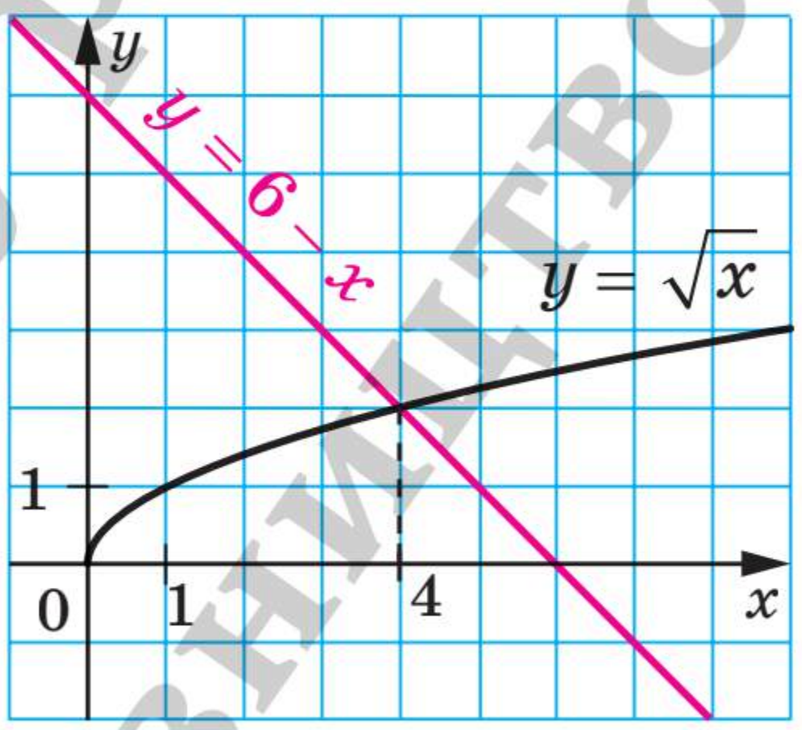


Рис. 39

ПРИКЛАД 2. Порівняйте числа: 1) 6 і $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $6 = \sqrt{36}$ і $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, тобто $6 > \sqrt{31}$.

2) Маємо: $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, $63 < 65$, $\sqrt{63} < \sqrt{65}$.

Отже, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$. ◀

ПРИКЛАД 3. При яких значеннях x виконується нерівність $\sqrt{x} < 3$?

Розв'язання. Запишемо дану нерівність так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Оскільки більше значення функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більшому значенню аргументу, то можна зробити висновок, що $x < 9$. Ураховуючи, що вираз $\sqrt{x}$ має зміст тільки при $x \geqslant 0$, отримуємо, що дана нерівність виконується при всіх x, які задовольняють нерівність $0 \leqslant x < 9$. ◀

ПРИКЛАД 4. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{5} > 2$ і $\sqrt{5} < 3$, то $\sqrt{5} - 2 > 0$ і $\sqrt{5} - 3 < 0$. Звідси отримуємо:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

Відповідь: 1. ◀

1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$? **2.** Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$? **3.** Чому дорівнює нуль функції $y = \sqrt{x}$? **4.** У якій координатній чверті розташований графік функції $y = \sqrt{x}$? **5.** Яка фігура є графіком функції $y = \sqrt{x}$? **6.** Невід'ємні числа a і b такі, що $a > b$. Порівняйте $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$. **7.** Відомо, що $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Порівняйте числа a і b.

ВПРАВИ

557.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Заповніть таблицю:

x	0,01	4				1600
y			9	11	30	

558.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.

1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює: 0,2; 5; 120; −4?

559.° Не виконуючи побудови, визначте, через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:
A (36; 6), B (4; −2), C (0,81; 0,9), D (−1; 1), E (4900; 70).
Проведіть у класі обговорення: як, використовуючи властивості даної функції, визначити точки, через які не проходить графік.

Київський університет

560.° Через яку з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt{x}$:

1) $A\ (16;\ 4)$;
2) $B\ (49;\ -7)$;
3) $C\ (3{,}6;\ 0{,}6)$;
4) $D\ (-36;\ 6)$?

561.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{86}$ і $\sqrt{78}$;
2) $\sqrt{1{,}4}$ і $\sqrt{1{,}6}$;
3) 5 і $\sqrt{26}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ і 1;
5) -7 і $-\sqrt{48}$;
6) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;
7) $\sqrt{41}$ і $2\sqrt{10}$;
8) $0{,}6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{1{,}1}$;
9) $\sqrt{75}$ і $4\sqrt{3}$.

562.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) 9 і $\sqrt{82}$;
3) $\sqrt{33}$ і 6;
4) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$;
5) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;
6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

563.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка функції $y=\sqrt{x}$ і прямої:

1) $y=1$;
2) $y=0{,}8$;
3) $y=-6$;
4) $y=500$.

564.• Запишіть у порядку спадання числа: 8, $\sqrt{62}$, $7{,}9$, $\sqrt{65}$, $8{,}2$.

565.• Запишіть у порядку зростання числа $4\sqrt{2}$ **В**, $6{,}1$ **О**, $2\sqrt{7}$ **А**, 6 **Н**, $3\sqrt{3}$ **С**, $\sqrt{37}$ **К**, $5{,}9$ **Е**. Букви, що відповідають даним числам, утворюють прізвище сучасної української біологині, першої і поки єдиної жінки, яка здійснила дві цілорічні експедиції на станцію «Академік Вернадський» в Антарктиді. Знайдіть в інтернеті відомості про цю науковицю, зокрема про її діяльність в Антарктиді.



566.• Яке з даних чисел задовольняє нерівність $8<x<9$:

1) $5\sqrt{3}$;
2) $7\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{83}$;
4) $2\sqrt{21}$?

Обговоріть з однокласниками й однокласницями, яку властивість функції $y=\sqrt{x}$ треба використати для розв'язання цієї задачі.

Конкурс «Вибір вчителя» Видавництво «Гімназія»

567. На координатній прямій позначили точку A (рис. 40), координата якої дорівнює одному з даних чисел: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{17}$. Укажіть це число.

Обґрунтуйте вашу відповідь та обговоріть її в класі.

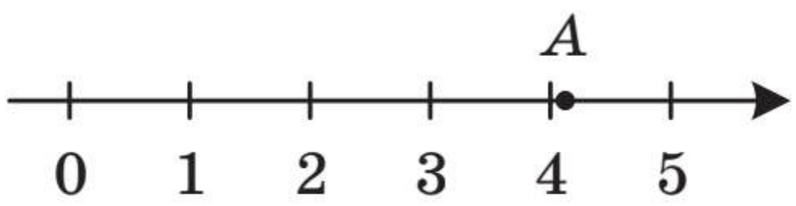


Рис. 40

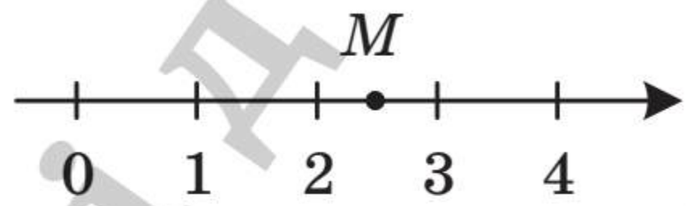


Рис. 41

568. На координатній прямій позначили точку M (рис. 41), координата якої дорівнює одному з даних чисел: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{2}$. Укажіть це число.

569. Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{0{,}98}$; 5) $-\sqrt{115}$;
2) $\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{59}$; 6) $-\sqrt{76{,}19}$?

570. Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{19}$; 2) $\sqrt{29}$; 3) $\sqrt{160}$; 4) $-\sqrt{86}$; 5) $-\sqrt{30{,}5}$?

571. Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 3 і $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ і $-2{,}3$;
2) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ і $2{,}8$.

572. Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ і $-\sqrt{47}$.

573. При яких значеннях x виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$?

Порівняйте свої відповіді з відповідями однокласників і однокласниць. Який приклад викликав найбільші труднощі? Яка, на вашу думку, причина цього?

574. При яких значеннях x виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$?

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

ЖА2 **575.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=x$; 3) $\sqrt{x}=x+2$; 5) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$;

2) $\sqrt{x}=x^2$; 4) $\sqrt{x}=0{,}5x+0{,}5$; 6) $\sqrt{x}=1{,}5-0{,}5x$.

ЖА2 **576.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=-x-1$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$.

577.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

578.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

579.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x}=-x^2$.

580.•• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}, & \text{якщо } x<0,\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$

1) Знайдіть: $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

581.•• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

1) Знайдіть: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

582.•• Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y=\sqrt{-x}$. Побудуйте графік даної функції.

583.•• Побудуйте графік функції $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

584.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

585.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

Копія видання

ЖА2 **586.*** Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = a - x$ залежно від значення a?

587.* Спростіть вираз

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{\left(\sqrt{a}-2\right)^2 + 8\sqrt{a}}.$$

588.* Спростіть вираз

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}-6\right)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{\left(\sqrt{a}+6\right)^2 - 24\sqrt{a}}.$$

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

589. Рік тому Олені підвищили заробітну плату спочатку на 10 %, а за два місяці по тому ще на 10 %. Коли Олені вперше підвищили зарплату, її колезі Марії заробітну плату підвищили одразу на 20 %. Хто із жінок має зараз більшу заробітну плату, якщо спочатку вони її отримували однакову?

590. Місяць тому в магазині «Сучасний одяг» ціну сорочки знизили спочатку на 10 %, а за два тижні по тому ще на 10 %. У магазині «Модний одяг» ціну такої сорочки одразу знизили на 20 %. У якому магазині вигідніше зараз придбати таку сорочку, якщо спочатку її ціна в обох магазинах була однаковою?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

591. У першому контейнері було 90 кг яблук, а в другому — 75 кг. Після того як з першого контейнера взяли в 3 рази більше яблук, ніж із другого, у першому залишилось у 2 рази менше яблук, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук узяли з першого контейнера?

592. Від пристані проти течії річки відплив моторний човен, власна швидкість якого дорівнює 12 км/год. Через 40 хв після відправлення човна зіпсувався мотор, і човен течією річки через 2 год принесло до пристані. Яка швидкість течії річки?

593. Відстань між двома містами легковий автомобіль проїжджає за 2 год, а вантажний — за 3 год. Через який час після початку руху вони зустрінуться, якщо виїдуть одночасно назустріч один одному із цих міст?

Книга з ресурсу видавництва «Освіта»

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

594. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 0$;
2) $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 + 5x = 0$;
4) $-3x^2 + 12 = 0$;
5) $5x^2 - 6x = 0$;
6) $0{,}2x^2 + 2 = 0$;
7) $\frac{1}{6}x^2 - 5x = 0$;
8) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
9) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

595. Натуральні числа від 1 до 37 записано в рядок так, що сума будь-яких перших кількох чисел ділиться націло на наступне за ними число. Яке число записано на третьому місці, якщо на першому місці записано число 37, а на другому — 1?

ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Яке з даних тверджень хибне?

А) -5 — ціле число;
Б) -5 — раціональне число;
В) -5 — ірраціональне число;
Г) -5 — дійсне число.

2. Яке із чисел є ірраціональним?

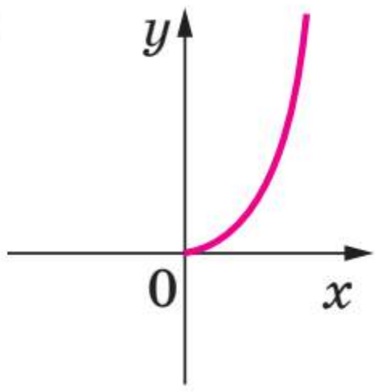
А) $\sqrt{4}$; Б) $\sqrt{0{,}4}$; В) $\sqrt{0{,}04}$; Г) $\sqrt{400}$.

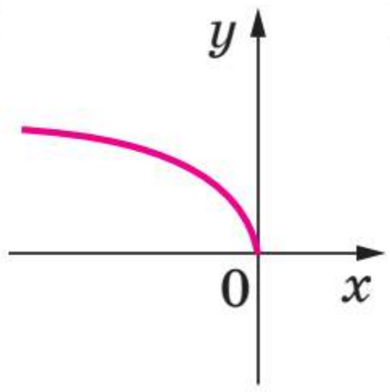
3. Графіком якої з функцій є парабола?

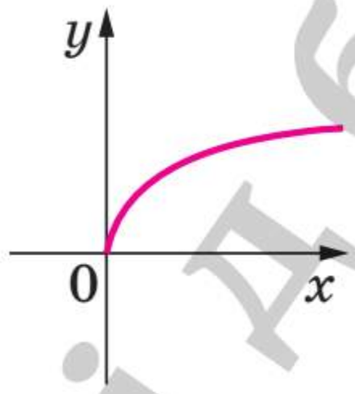
А) $y = 2x$; Б) $y = x^2$; В) $y = \frac{2}{x}$; Г) $y = \frac{x}{2}$.

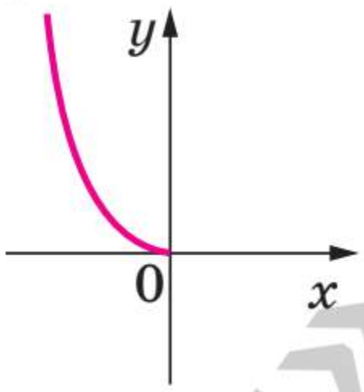
Копія. Видавництво «Ранок»

4. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x}$?

А)


Б)


В)


Г)


5. Який із наведених виразів не має змісту?

А) $\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{2}$; В) $\sqrt{-2}$; Г) $\sqrt{(-2)^2}$.

6. Обчисліть значення виразу $\sqrt{7x-3}$ при $x = 4$.

А) 5; Б) −5; В) 25; Г) −25.

7. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt{36 \cdot 0{,}81}$?

А) 6,9; Б) 54; В) 5,4; Г) 0,54.

8. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.

А) 2; Б) 4; В) 2,5; Г) 0,4.

9. Спростіть вираз $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$.

А) $15\sqrt{a}$; В) $7\sqrt{a}$;

Б) $15a$; Г) $7a$.

10. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{12}{\sqrt{2}}$.

А) $\sqrt{2}$; В) $6\sqrt{2}$;

Б) $4\sqrt{2}$; Г) $10\sqrt{2}$.

11. Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.

А) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; В) 1;

Б) $\frac{a+2}{a-2}$; Г) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

НАЦІОНАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ ОСВІТИ
КОПІЯ ВИДАВНИЦТВА

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Д).

Вираз	Тотожно рівний вираз
1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$	А) $\sqrt{5}$
2) $(\sqrt{45}-\sqrt{5})(\sqrt{45}+\sqrt{5})$	Б) $-\sqrt{5}$
3) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{45})^2}-\sqrt{45}$	В) 40
	Г) 15
	Д) $-5\sqrt{5}$

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4\sqrt{2500}-\frac{1}{3}\sqrt{81}$;

2) $\sqrt{0{,}49\cdot 64}$;

3) $\sqrt{3^2\cdot 2^{10}}$;

4) $\sqrt{90}\cdot\sqrt{10}-\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.

2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=11$;

2) $x^2=-9$;

3) $\sqrt{x}=16$;

4) $\sqrt{x}=-4$.

3.° Порівняйте числа:

1) $3\sqrt{7}$ і $2\sqrt{15}$;

2) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ і $\frac{1}{4}\sqrt{48}$.

4.• Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{5}-6\sqrt{20}+7\sqrt{45}$;

2) $(\sqrt{27}+\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$;

3) $(3\sqrt{2}-5)^2$;

4) $(4\sqrt{3}-\sqrt{7})(4\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

5.• При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{-5x}$;

2) $\sqrt{-y^6}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$?

Видавництво «Ранок»

6.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-81}{\sqrt{a}+9}$; 2) $\dfrac{17-\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$; 3) $\dfrac{a^2-2a\sqrt{7}+7}{a^2-7}$.

7.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{11}-3}$.

8.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{6m^2}$, якщо $m \leqslant 0$; 2) $\sqrt{3x^4}$; 3) $\sqrt{-a^9}$.

9.°° Спростіть вираз $\sqrt{(4-\sqrt{19})^2}+\sqrt{(\sqrt{19}-5)^2}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Властивості функції $y = x^2$

Область визначення: $\mathbb{R}$.
Область значень: множина невід'ємних чисел.
Графік: парабола.
Нуль функції: $x = 0$.
Властивість графіка: якщо точка $A\,(x_0; y_0)$ належить графіку функції, то точка $B\,(-x_0; y_0)$ також належить графіку.

Квадратний корінь

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичний квадратний корінь

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Рівні множини

Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Київський університет імені Бориса Грінченка
Видавництво «Університетська гімназія»

Підмножина

Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Позначення числових множин

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;
$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

Зв'язок між числовими множинами

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Властивості арифметичного квадратного кореня

Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність $\sqrt{a^2} = |a|$.

Для будь-якого дійсного числа a і будь-якого натурального числа n виконується рівність $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Для будь-яких невід'ємних чисел a_1 і a_2 таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

Властивості функції $y = \sqrt{x}$

Область визначення: множина невід'ємних чисел.
Область значень: множина невід'ємних чисел.
Графік: вітка параболи.
Нуль функції: $x = 0$.
Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Комунальний вищий державний навчальний заклад «Видавничий коледж імназія»

§3 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Опанувавши матеріал цього параграфа, ви навчитеся розв'язувати рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$.
Ознайомитеся з теоремою Вієта для квадратного рівняння.
Оволодієте прийомами розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

18. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають **рівнянням першого степеня.**

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня. А ось лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Числа a і b називають **коефіцієнтами рівняння першого степеня** $ax = b$.

Те, що множина рівнянь першого степеня є підмножиною множини лінійних рівнянь, ілюструє схема на рисунку 42.



Рис. 42

Ви також умієте розв'язувати деякі рівняння, які містять змінну в другому степені. Наприклад, готуючись до вивчення нової теми, ви розв'язали рівняння $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (вправа 594). Кожне із цих рівнянь має вид $ax^2 + bx + c = 0$.

КОПІЯ КУРСУ ВИДАВНИЦТВА

Означення:

Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають **коефіцієнтами квадратного рівняння.** Число a називають **першим** або **старшим коефіцієнтом,** число b — **другим коефіцієнтом,** число c — **вільним членом.**

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Ліва частина квадратного рівняння є многочленом другого степеня. Тому квадратне рівняння ще називають **рівнянням другого степеня.**

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним.**

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням.**

Існує три види неповних квадратних рівнянь.

1. При $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповні квадратні рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.

2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це рівняння має два корені x_1 і x_2, один з яких дорівнює нулю, а другий є коренем рівняння першого степеня $ax + b = 0$. Звідси $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Київ. Русанівський ліцей
Видавництво «Мазіяр»

3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має. У другому випадку рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Узагальнимо отримані результати:

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

Розв'язання. При $x > 0$ маємо: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$. Звідси $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ або $x = -2$. Але корінь $x = -2$ не задовольняє умову $x > 0$.

При $x < 0$ маємо: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$. Звідси $x^2 + 4 = 0$. Останнє рівняння не має коренів.

Відповідь: 2. ◀

1. Яке рівняння називають лінійним? **2.** Яке рівняння називають рівнянням першого степеня? **3.** Наведіть приклад лінійного рівняння, яке є рівнянням першого степеня, і приклад лінійного рівняння, яке не є рівнянням першого степеня. **4.** Яке рівняння називають квадратним? **5.** Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$? **6.** Яке квадратне

рівняння називають зведеним? **7.** Яке квадратне рівняння називають неповним? **8.** Які існують види неповних квадратних рівнянь? Які корені має рівняння кожного з видів?

ВПРАВИ

596.° Укажіть серед даних рівнянь квадратні та назвіть, чому дорівнюють старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
8) $x^3 - x - 9 = 0$;
9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

597.° Заповніть таблицю:

Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Коефіцієнти рівняння		
	a	b	c
$7x^2 - 2x - 19 = 0$			
$6x - 0{,}3x^2 = 0$			
$\frac{1}{6}x^2 - 2 = 0$			
$x - 8 + x^2 = 0$			
$-x^2 - x = 0$			
$2{,}8x^2 = 0$			

598.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;
2) старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює -8, а вільний член дорівнює $-\frac{1}{3}$;
3) старший коефіцієнт дорівнює $-0{,}5$, другий коефіцієнт дорівнює 0, а вільний член дорівнює $2\frac{3}{7}$;
4) старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює -2, а вільний член дорівнює 0.

КОПІЯ РУЧНОЇ РОБОТИ ВИДАВНИЦТВО «Київська гімназія»

599.° Складіть квадратне рівняння, у якому:
1) старший коефіцієнт дорівнює -1, другий коефіцієнт дорівнює -2, а вільний член дорівнює $1{,}6$;
2) старший коефіцієнт і вільний член дорівнюють 2, а другий коефіцієнт дорівнює 0.

600.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:
1) $6x\,(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $x\,(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
4) $4x\,(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

601.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:
1) $x\,(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

602.° Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:
1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

Обговоріть у класі, чи завжди можна виконати перетворення, про яке йдеться в умові задачі.

603.° Перетворіть дане квадратне рівняння у зведене:
1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

604.° Які із чисел 1; 0; -3; 2; -10 є коренями рівняння $x^2 + 9x - 10 = 0$?

605.° Доведіть, що:
1) число -1 не є коренем рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$;
2) числа $-\frac{1}{3}$ і -3 є коренями рівняння $3x^2 + 10x + 3 = 0$;
3) числа $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ є коренями рівняння $3x^2 - 6 = 0$.

606.° Доведіть, що:
1) число -5 є коренем рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$;
2) число 4 не є коренем рівняння $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

607.° Розв'яжіть рівняння:
1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

Комунальне видавництво «Імназія»

608.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

609.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6\,(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

610.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

611.• Доведіть, що числа $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$ є коренями рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$.

612.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 - 8x}{6} = x$;
2) $\dfrac{x^2 - 3}{5} - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 2$.

613.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 + x}{7} - \dfrac{x}{3} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 + 1}{6} - \dfrac{x^2 + 2}{4} = -1$.

614.• При якому значенні m:

1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число -3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\dfrac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

615.• При якому значенні n:

1) число 6 є коренем рівняння $x^2 - nx + 3 = 0$;
2) число 0,5 є коренем рівняння $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

616.• Розв'яжіть рівняння, виділивши в його лівій частині квадрат двочлена:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

617.• Розв'яжіть рівняння, виділивши в його лівій частині квадрат двочлена:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

618.• Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 36 більший за менше з них.

Проаналізуйте й обговоріть у класі, як зміниться відповідь до задачі, якщо в умові йтиметься про цілі числа.

619.• Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 80 більший за більше з них.

Комунальний заклад «Вінницький обласний фізико-математичний ліцей-інтернат» Вінницької обласної ради

620.• Знайдіть два послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 1.

Проаналізуйте й обговоріть у класі, як зміниться відповідь до задачі, якщо в умові йтиметься про натуральні числа.

621.• Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне число, більше з них. Знайдіть ці числа.

622.• При якому значенні m не є квадратним рівняння:

1) $(m-4)\,x^2+mx+7=0$;
2) $(m^2+8m)\,x^2+(m+8)\,x+10=0$;
3) $(m^2-81)\,x^2-6x+m=0$?

623.• При якому значенні m не є квадратним рівняння:

1) $(m+5)x^2-2mx+3=0$;
2) $(m^2+9)+(m+3)x+4=0$?

624.•• Яким числом, додатним чи від'ємним, є відмінний від нуля корінь неповного квадратного рівняння $ax^2+bx=0$, якщо:

1) $a>0$, $b>0$;
2) $a<0$, $b>0$;
3) $a>0$, $b<0$;
4) $a<0$, $b<0$?

625.•• Чи має корені неповне квадратне рівняння $ax^2+c=0$, якщо:

1) $a>0$, $c>0$;
2) $a<0$, $c>0$;
3) $a>0$, $c<0$;
4) $a<0$, $c<0$?

626.•• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $3x^2-2x+4+*=0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0 і 4;
2) -1 і 1?

Порівняйте ваші відповіді з відповідями однокласників і однокласниць. Чи сталося (або могло статись) таке, що до однієї задачі знайдено різні, але правильні відповіді? Обговоріть це в класі. З'ясуйте, скільки розв'язків має кожна задача.

627.•• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $x^2+5x-1+*=0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0 і -7;
2) -4 і 4?

628.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-3|x|=0$;
2) $x^2+|x|-2x=0$;
3) $x^2-\dfrac{|x|}{x}=0$;
4) $x^2-\dfrac{2x^2}{|x|}=0$.

Національний видавничий консультаційний центр «Академія»

629.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7|x| = 0$;

2) $x^2 - 6|x| + x = 0$;

3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0$.

630.$^{\bullet\bullet}$ При якому значенні a рівняння $(a-2)x^2 + (2a-1)x + a^2 - 4 = 0$ є:

1) лінійним;
2) зведеним квадратним;
3) неповним незведеним квадратним;
4) неповним зведеним квадратним?

631.$^{\bullet\bullet}$ Визначте, при якому значенні a один із коренів квадратного рівняння дорівнює 0, і знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a-8)x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a+3)x + a^2 - 3a = 0$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

632. Для озеленення району новобудов міськрада виділила кошти на закупівлю 80 саджанців дерев: 50 каштанів по 1400 грн за саджанець і 30 тополь. Середня ціна одного саджанця становить 1325 грн. Скільки коштував один саджанець тополі?

633. Одна ручка коштує 9 грн, а набір із 4 ручок — 30 грн. За яку найменшу суму грошей можна придбати 50 ручок?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

634. Виконайте дії:

1) $\frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2}$;

2) $\frac{a^2-6b^2}{3b} + 2b$;

3) $\frac{4}{c^2-4c} - \frac{c+4}{c^2-16}$;

4) $\frac{56a^5}{b^4} \cdot \frac{b^2}{14a^5}$;

5) $\frac{72a^3b}{c} : (27a^2b)$;

6) $\frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{10a+5}{a+3}$.

635. Спростіть вираз:

1) $10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$;

2) $\left(3\sqrt{5} - \sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;

3) $\left(5 - \sqrt{2}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{3}\right)\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{24}$.

Комунальне видавництво «Харківська гімназія»

636. Який із графіків на рисунку 43 є графіком функції:

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{2}{x}$?

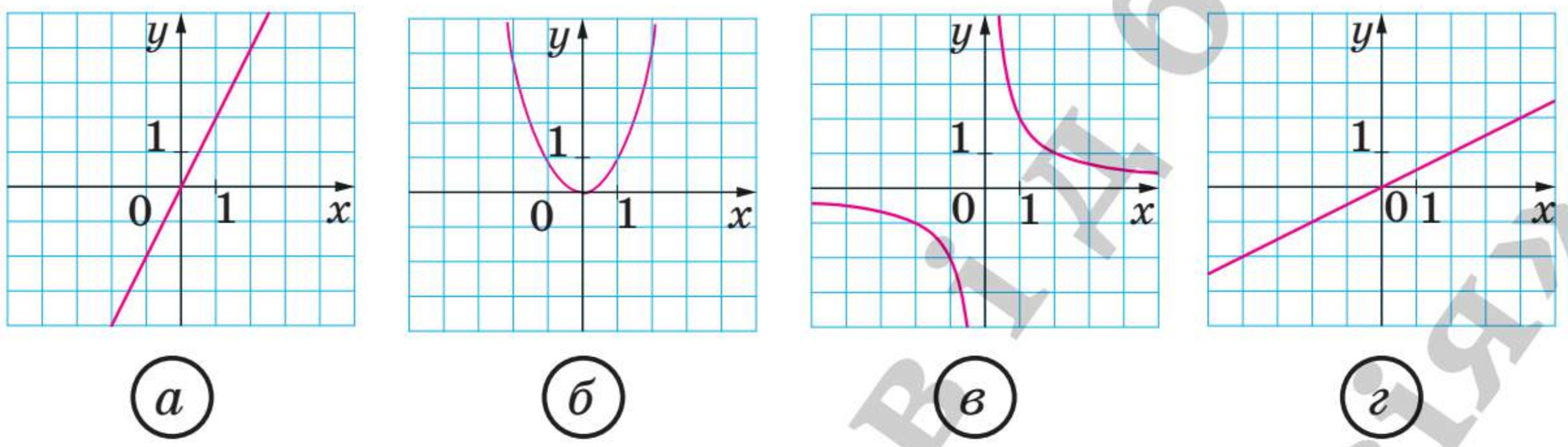


Рис. 43

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

637. Обчислювальний автомат отримує на вході картку із числами $(a;\ b)$ і видає на виході картку із числами $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$. Чи можна за допомогою цього автомата з картки із числами (0,25; 1000) отримати картку із числами (1,25; 250)?

19. Формула коренів квадратного рівняння

Знаючи коефіцієнти a і b рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a, b і c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходити його корені.

Маємо:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

КУРСНИЙ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Існування коренів рівняння (2) та їхня кількість залежать від знака значення виразу $b^2 - 4ac$. Це значення називають **дискримінантом квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D, тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння (3), а отже, і рівняння (1) коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

Висновок:

якщо $D < 0$, то квадратне рівняння коренів не має.

2. Якщо $D = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Висновок:

якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння (3) можна записати у вигляді

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$.

Тоді $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ або $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Висновок:

якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Застосовують також коротку форму запису:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Цей запис називають **формулою коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати й у випадку, коли $D = 0$. Маємо:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Під час розв'язування квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geqslant 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися іншою формулою, яка в багатьох випадках полегшує обчислення.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Знайдемо його дискримінант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Позначимо вираз $k^2 - ac$ через D_1.

Якщо $D_1 \geqslant 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння отримуємо:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

тобто $x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1 = k^2 - ac$.

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Розв'язання. 1) Для даного рівняння $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$. Дискримінант рівняння

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

Копія з РУЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИКЛАВІТЕЛЬ «Академія»

Отже, $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{196}}{6} = \dfrac{2-14}{6} = -2$, $x_2 = \dfrac{2+14}{6} = \dfrac{8}{3} = 2\dfrac{2}{3}$.

Відповідь: $-2;\ 2\dfrac{2}{3}$.

2) Маємо: $D = 2^2 - 4\cdot(-0{,}5)\cdot(-2) = 4 - 4 = 0$.

Отже, дане рівняння має один корінь:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Зауважимо, що дане рівняння можна розв'язати іншим способом. Помноживши обидві частини рівняння на -2, отримуємо:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Звідси $(x-2)^2 = 0$; $x - 2 = 0$; $x = 2$.

Відповідь: 2.

3) $D = 5^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 25 + 12 = 37$.

Рівняння має два корені: $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь можна записати одним із двох способів: $\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2};\ \dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$ або $\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.

Отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

5) Подамо дане рівняння у вигляді $5x^2 + 2\cdot(-8)x + 3 = 0$ і застосуємо формулу коренів для рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5\cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5},\quad x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{5};\ 3$. ◀

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$;

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0$;

3) $9x^2 - 8x + \dfrac{5}{x-1} = 1 + \dfrac{5}{x-1}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

При $x \geqslant 0$ отримуємо рівняння $x^2 + 6x - 16 = 0$, яке має корені -8 і 2, але корінь -8 не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

При $x < 0$ отримуємо рівняння $x^2 - 6x - 16 = 0$, яке має корені -2 і 8, але корінь 8 не задовольняє умову $x < 0$.

Відповідь: -2; 2.

2) Оскільки $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ при $x \geqslant 0$, то шукані корені мають задовольняти дві умови одночасно: $x^2 - 10x - 24 = 0$ і $x \geqslant 0$. У такому разі говорять, що дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Рівняння $x^2 - 10x - 24 = 0$ має корені -2 і 12, однак корінь -2 не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

Відповідь: 12.

3) Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Звідси

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \text{ або } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{9}$. ◀

ПРИКЛАД 3. При якому значенні b має єдиний корінь рівняння:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$;

2)* $(b + 6)\, x^2 - (b - 2)\, x + 1 = 0$?

Розв'язання. 1) Дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Маємо:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) При $b = -6$ отримуємо лінійне рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.

При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

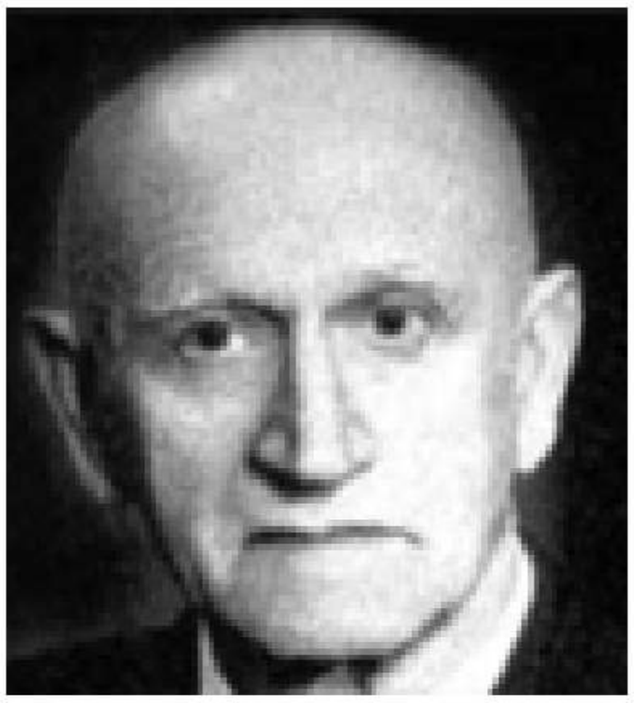
$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20$.

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

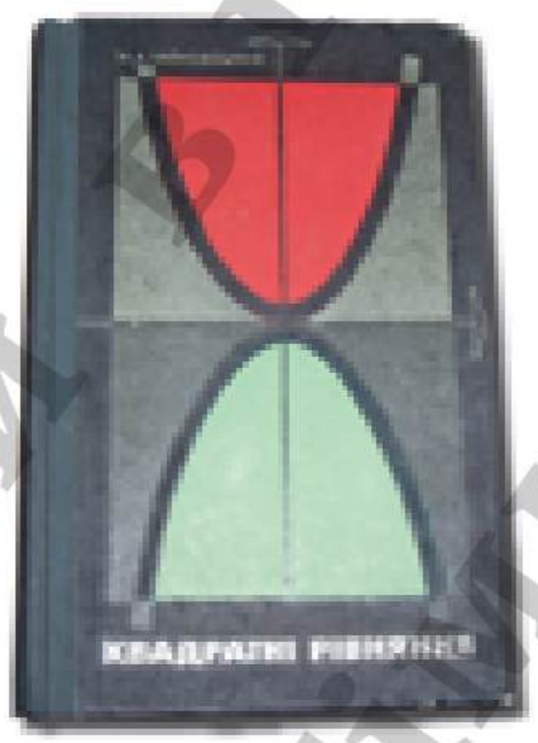
Відповідь: $b = -2$, або $b = 10$, або $b = -6$. ◀

Курс «Підручник» Видавництво «Генеза»

Кілька поколінь учителів математики набували педагогічного досвіду, а їхні учні та учениці поглиблювали свої знання, користуючись чудовою книжкою «Квадратні рівняння» блискучого українського педагога й математика Миколи Андрійовича Чайковського (1887–1970). М. А. Чайковський залишив велику наукову й педагогічну спадщину. Його роботи відомі далеко за межами України.



М. А. Чайковський
(1887–1970)



1. Значення якого виразу називають дискримінантом квадратного рівняння? **2.** Як залежить кількість коренів квадратного рівняння від знака дискримінанта? **3.** Запишіть формулу коренів квадратного рівняння. **4.** Яким алгоритмом зручно користуватися під час розв'язування квадратних рівнянь?

ВПРАВИ

638.° Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

639.° Яке з наведених рівнянь має два корені:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

640.° Яке з наведених рівнянь не має коренів:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

НК УРСЬКЕ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

641.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
8) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
9) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
10) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
11) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
12) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
13) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
14) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
15) $2x^2 - x - 4 = 0$;
16) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

642.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
6) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
7) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
8) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
9) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
10) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

643.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) многочленів $6x^2 - 2$ і $5 - x$;
2) двочлена $y - 6$ і тричлена $y^2 - 9y + 3$;
3) тричленів $4m^2 + 4m + 2$ і $2m^2 + 10m + 8$?

644.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) двочлена $4x + 4$ і тричлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) тричленів $10p^2 + 10p + 8$ і $3p^2 - 10p + 11$?

645.° Знайдіть корені рівняння:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$.

646.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$.

647.° Знайдіть натуральне число, квадрат якого на 42 більший за дане число.

648.° Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см^2, а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

649.° Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

650.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{6} - 1\right) - \sqrt{6} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «МАЗІЯ»

651.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;

2) $x^2 - x\left(\sqrt{3} + 2\right) + 2\sqrt{3} = 0$;

3) $\dfrac{2x^2 + x}{3} - \dfrac{x + 3}{4} = x - 1$.

652.• При якому значенні a число $\dfrac{1}{4}$ є коренем рівняння $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

653.• При якому значенні a число 2 є коренем рівняння $x^2 - 0{,}5ax - 3a^2 = 0$?

654.• Добуток двох послідовних натуральних чисел на 89 більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.

655.• Сума квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа.

656.• Від квадратного аркуша картону відрізали смужку у формі прямокутника завширшки 3 см і завдовжки зі сторону квадрата. Площа решти аркуша становить 40 см^2. Якою була довжина сторони квадратного аркуша картону?

657.• Від прямокутного аркуша паперу завдовжки 18 см відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині аркуша. Площа решти прямокутника становить 72 см^2. Якою була ширина аркуша паперу?

658.• Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один із них на 14 см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 34 см.

659.• Знайдіть сторони прямокутника, якщо їхня різниця дорівнює 31 см, а діагональ прямокутника дорівнює 41 см.

660.• Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

661.• (*Стародавня індійська задача.*)

На дві зграї розділившись,
Мавпи в гаї веселились.
Одна восьма їх в квадраті
У кущах потішно грали.
А дванадцять на ліанах
То висіли, то стрибали.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

662.•• Знайдіть три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більший за подвоєну суму другого та третього.

663.ᵒᵒ Знайдіть чотири послідовних парних натуральних числа, якщо сума першого та третього чисел у 5 разів менша від добутку другого та четвертого чисел.

664.ᵒᵒ У турнірі з футболу було зіграно 36 матчів. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з кожною з решти команд?

665.ᵒᵒ Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 90 діагоналей?

666.ᵒᵒ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2+7x-4|=4$;

2) $5x^2-8|x|+3=0$;

3) $x|x|+6x-5=0$;

4) $x^2+\frac{4x^2}{|x|}-12=0$;

5) $x^2-8\sqrt{x^2}+15=0$;

6) $x^2+4\sqrt{x^2}-12=0$.

667.ᵒᵒ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2+10x-4|=20$;

2) $x|x|+12x-45=0$;

3) $\frac{x^3}{|x|}-14x-15=0$;

4) $x^2-8\sqrt{x^2}-9=0$.

668.ᵒᵒ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+2x+\frac{3}{x-8}=\frac{3}{x-8}+80$;

2) $x^2+8\left(\sqrt{x}\right)^2-33=0$.

Обговоріть у класі, як впливає у задачі 1) наявність виразу $\frac{3}{x-8}$ на відповідь.

669.ᵒᵒ Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2+5x-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$;

2) $5x^2-14\left(\sqrt{x}\right)^2-3=0$.

670.ᵒᵒ При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $2x^2+4x-b=0$;

2) $3x^2-bx+12=0$?

671.ᵒᵒ При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $6x^2-18x+b=0$;

2) $8x^2+bx+2=0$?

672.ᵒᵒ Доведіть, що при будь-якому значенні p має два корені рівняння:

1) $4x^2-px-3=0$;

2) $x^2+px+p-2=0$.

673.ᵒᵒ Доведіть, що при будь-якому значенні m не має коренів рівняння:

1) $x^2+mx+m^2+1=0$;

2) $x^2-2mx+2m^2+9=0$.

674.ᵒᵒ Доведіть, що при будь-якому значенні b рівняння $x^2+bx-7=0$ має два корені.

Київський видавничий коледж «Гімназія»

675.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (3a + 1)\,x + 2a^2 + a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)\,x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3\,(2a - 1)\,x^2 - 2\,(a + 1)\,x + 1 = 0$.

676.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - (2a - 5)\,x - 3a^2 + 5a = 0$;
2) $x^2 + (3a - 4)\,x - 12a = 0$;
3) $ax^2 - (a + 1)\,x + 1 = 0$.

677.* При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)\,x^2 - (b + 6)\,x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)\,x^2 + (2b - 8)\,x + 15 = 0$?

678.* При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 + x + b = 0$;
2) $(b + 3)\,x^2 + (b + 1)\,x - 2 = 0$?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

679. Федір і Олеся їхали в одному поїзді. Федір сів у дванадцятий вагон від голови поїзда, а Олеся — у шостий вагон із хвоста поїзда. Виявилося, що вони їдуть у тому самому вагоні. Скільки вагонів у поїзді?

680. У книжці бракує кількох аркушів. Ліва сторінка розвороту має номер 24, а права — 53. Скільки аркушів бракує між цими сторінками?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

681. На координатній площині позначили точку M (рис. 44). Графіки яких з даних функцій проходять через точку M і не проходять через початок координат:

1) $y = x^2$;
2) $y = -2x$;
3) $y = -\dfrac{8}{x}$;
4) $y = 2 - x$?

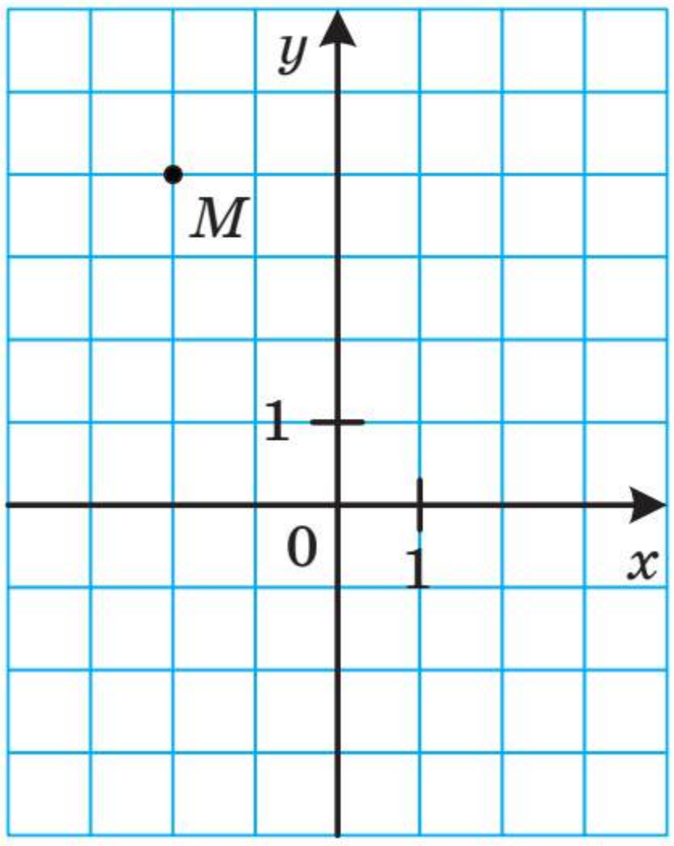


Рис. 44

682. Спростіть вираз

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

КЗ Видавництво «Освіта»

683. Розташуйте в порядку зростання числа $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ і 4.

684. Робітниця мала виготовляти щодня 10 деталей. Проте вона виготовляла щодня 12 деталей, і вже за 2 дні до закінчення терміну роботи їй залишилося виготовити 6 деталей. Скільки деталей мала виготовити робітниця?

685. Є брухт сплавів двох сортів, які містять 5 % і 45 % нікелю відповідно. Скільки тонн брухту кожного із цих сортів треба взяти, щоб одержати 120 т сплаву, який містить 30 % нікелю?



ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

686. Розв'яжіть рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів та порівняйте їх із другим коефіцієнтом і вільним членом рівняння:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

687. Заповніть таблицю, де a, b і c — коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а x_1 і x_2 — його корені:

Рівняння	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						



УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

688. Доведіть, що зі 101 кубика, пофарбованого в довільні кольори, можна вибрати або 11 кубиків одного кольору, або 11 кубиків різного кольору.

20. Теорема Вієта



Готуючись до вивчення цього пункту, ви розв'язали вправи 686, 687. Можливо, ці вправи підказали вам, як сума та добуток коренів квадратного рівняння пов'язані з його коефіцієнтами.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

Теорема 20.1 (теорема Вієта):

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення. Умовою теореми передбачено, що дане квадратне рівняння має корені. Тому його дискримінант D не може бути від'ємним.

Нехай $D > 0$. Застосувавши формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Маємо: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Нехай $D = 0$. У цьому разі вважають, що $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacktriangleleft$$

Наслідок:

Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c.$$

Іншими словами, *сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.*

Теорема 20.2 (обернена до теореми Вієта):

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Доведення. Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перетворимо його у зведене:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Згідно з умовою теореми це рівняння можна записати так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\ x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Підставимо в ліву частину цього рівняння замість x спочатку число α, а потім число β. Отримуємо:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\ \alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\ \beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким чином, числа α і β є коренями рівняння (*), а отже, і коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. ◀

Наслідок:

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

Цей наслідок дає змогу розв'язувати деякі квадратні рівняння усно, не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння.

ПРИКЛАД 1. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Розв'язання. З'ясуємо, чи має дане рівняння корені.

Маємо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Отже, рівняння має два корені x_1 і x_2.

Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$. ◀

ПРИКЛАД 2. Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа -7 і 4.

Розв'язання. За теоремою Вієта $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$. ◀

ПРИКЛАД 3. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) 4 і $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6 - \sqrt{7}}{2}$ і $\frac{6 + \sqrt{7}}{2}$.

Розв'язання. 1) Нехай $x_1 = 4$ і $x_2 = -\frac{5}{7}$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

Тоді $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$, $x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Помноживши обидві частини цього рівняння на 7, отримуємо квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Нехай $x_1 = \frac{6 - \sqrt{7}}{2}$ і $x_2 = \frac{6 + \sqrt{7}}{2}$.

Тоді $$x_1 + x_2 = \frac{6 - \sqrt{7}}{2} + \frac{6 + \sqrt{7}}{2} = 6,$$

$$x_1 x_2 = \frac{6 - \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6 + \sqrt{7}}{2} = \frac{36 - 7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Отже, x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Звідси шуканим є рівняння $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ◄

ПРИКЛАД 4. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.



Франсуа Вієт
(1540–1603)

Французький математик, за фахом юрист. У 1591 р. упровадив буквені позначення не лише для невідомих величин, але й для коефіцієнтів рівнянь, завдяки чому стало можливим виражати властивості рівнянь та їхні корені загальними формулами. Серед своїх відкриттів сам Вієт особливо високо цінив установлення залежності між коренями й коефіцієнтами рівнянь.

КОНТУР Видавництво «Гімназія»

Тоді маємо: $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{3}{2}:\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{1}{3}.$

Відповідь: $-\frac{1}{3}.$ ◀

ПРИКЛАД 5. Число 4 є коренем рівняння $3x^2-10x+n=0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення n.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, причому $x_1=4$.

За теоремою Вієта $x_1+x_2=\frac{10}{3}$. Тоді $x_2=\frac{10}{3}-4=-\frac{2}{3}$.

Маємо: $\frac{n}{3}=x_1x_2=-\frac{8}{3}$, $n=-8$.

Відповідь: $x_2=-\frac{2}{3}$, $n=-8$. ◀

ПРИКЛАД 6. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 4 більші за відповідні корені рівняння $x^2+6x-14=0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, x_1' і x_2' — корені шуканого рівняння.

За умовою $x_1'=x_1+4$, $x_2'=x_2+4$.

За теоремою Вієта $x_1+x_2=-6$, $x_1x_2=-14$.

Тоді маємо:

$$x_1'+x_2'=x_1+4+x_2+4=(x_1+x_2)+8=-6+8=2;$$

$$x_1'x_2'=(x_1+4)(x_2+4)=x_1x_2+4(x_1+x_2)+16=$$

$$=-14+4\cdot(-6)+16=-22.$$

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, шуканим є рівняння $x^2-2x-22=0$.

Відповідь: $x^2-2x-22=0$. ◀

1. Сформулюйте теорему Вієта. **2.** Сформулюйте наслідок з теореми Вієта. **3.** Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта. **4.** Сформулюйте наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта.

ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

У словах іншомовного походження звук [й] передаємо буквою **й**, а в складі буквосполучень [йе], [йі], [йу], [йа] — буквами **є, ї, ю, я**: *Вієт, конвеєр, проєкт, Соєр, Гаїті, Юнона, Ісая, рояль*.

Видавництво «Ірпінь»

ВПРАВИ

689.° Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 + 5x - 10 = 0$:
1) 5; 2) -5; 3) -10; 4) 10?

690.° Чому дорівнює добуток коренів рівняння $x^2 - 14x + 12 = 0$:
1) -14; 2) 14; 3) 12; 4) -12?

691.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

692.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

693.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 і 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 і 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 і 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 і 11.

694.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:
1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 і -2;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа -2 і -3.

695.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) -8 і 6; 2) 4 і 5.

696.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) -2 і 0,5; 2) -10 і -20.

697.• Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) 2 і 5; 3) $-0{,}2$ і -10; 5) 0 і 6;
2) $-\frac{1}{3}$ і 2; 4) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$.

698.• Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) -7 і -8; 3) $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$;
2) 5 і $-0{,}4$; 4) $5-\sqrt{10}$ і $5+\sqrt{10}$.

Київ. Видавництво «Київська академія»

699.• Число -2 є коренем рівняння $x^2 - 8x + q = 0$. Знайдіть значення q і другий корінь рівняння.
Обговоріть у класі, як розв'язати цю задачу, не застосовуючи теорему Вієта.

700.• Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення p і другий корінь рівняння.

701.• Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

702.• Число $-0{,}2$ є коренем рівняння $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Знайдіть значення m і другий корінь рівняння.

703.• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

704.• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

705.• При якому значенні b корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

706.• Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
6) $x^2 - x - 2 = 0$;
7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

707.• Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + x - 12 = 0$.

708.• Які з даних рівнянь мають два додатних корені, які — два від'ємних, а які — корені різних знаків:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

709.•• Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення c і корені рівняння.

710.•• Корені рівняння $x^2 + 20x + a = 0$ відносяться як $7 : 3$. Знайдіть значення a та корені рівняння.

711.•• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння та значення m.

712.•• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + 4x + n = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = 8$. Знайдіть корені рівняння та значення n.

713.•• Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

714.•• Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$;
2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

715.•• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

716.•• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $|x_2 - x_1|$.

717.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

718.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 12x + 4 = 0$.

719.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого в 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

720.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази більші за відповідні корені рівняння $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

721.* Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + ax - 7 = 0$ дорівнює $\frac{46}{9}$. Знайдіть значення a.

722.* Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - ax + 8 = 0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Знайдіть значення a.

723.* Чи є правильним твердження:

1) рівняння $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ має корені різних знаків при будь-якому значенні a;
2) якщо рівняння $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ має корені, то незалежно від значення a вони обидва від'ємні?

Видавництво «Ранок»

724.* Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:
1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

725.* Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:
1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

726.* Корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнюють його коефіцієнтам b і c. Знайдіть b і c.

727.* При яких значеннях a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює: 1) 12; 2) 6?

728.* При яких значеннях a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a - 1)\,x - 2a = 0$ дорівнює 9?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

729. Кожен із 700 учнів та учениць школи вивчає тільки одну з іноземних мов: або англійську, або іспанську, або італійську. На діаграмі (рис. 45) показано, як розподілені учні та учениці за мовами, які вони вивчають. Якому з наведених чисел може дорівнювати кількість тих, хто вивчає італійську мову:
1) 400; 2) 150; 3) 200; 4) 350?

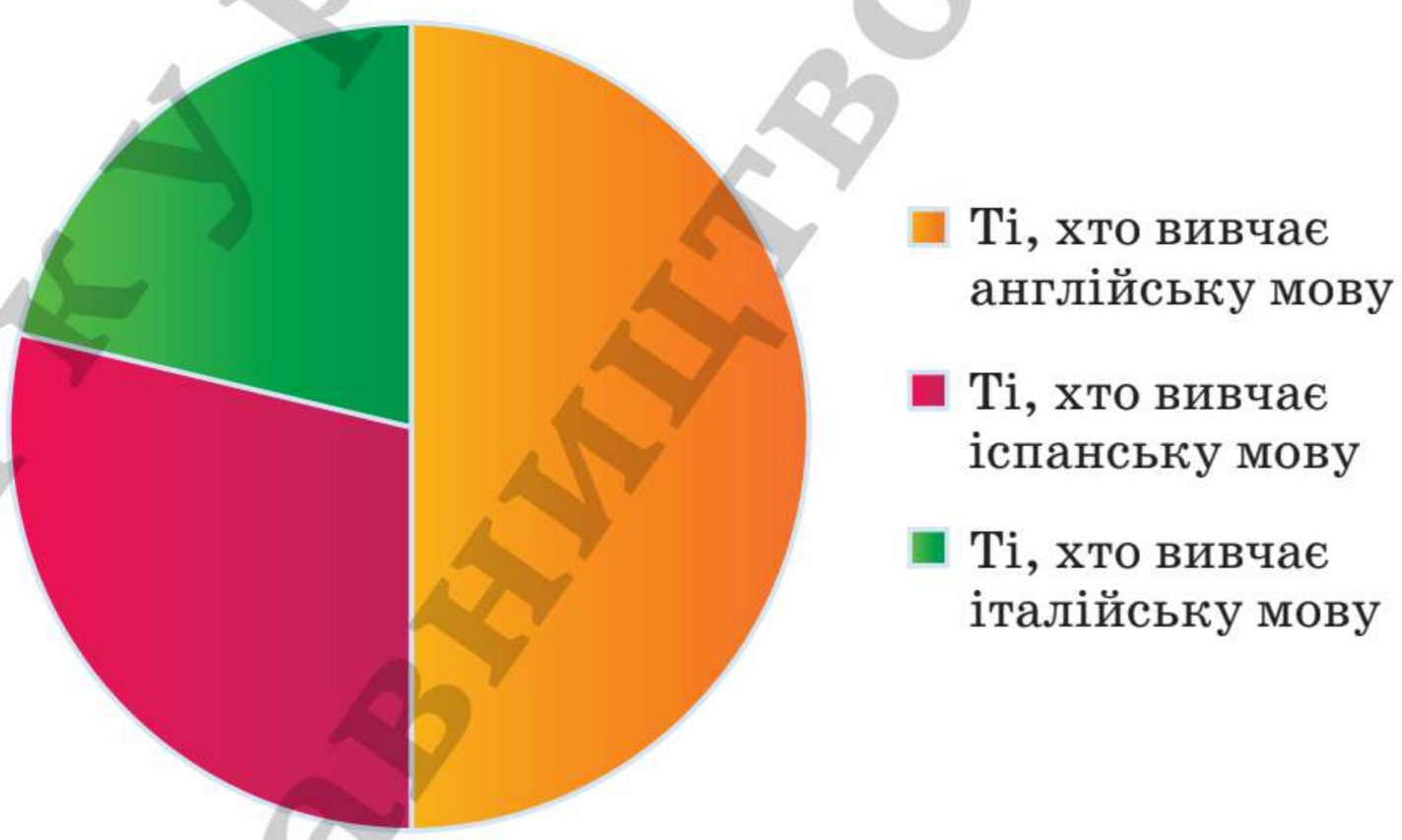


Рис. 45

730. Під час розпродажу ціну на товар знизили на 20 %. На скільки відсотків треба підвищити ціну на товар, щоб вона дорівнювала початковій?

Комунальне навчальне видавництво «Київський університет імені Бориса Грінченка»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

731. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16}$; 3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25}$; 5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b}$; 4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4}$; 6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

732. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y=x^2$ і $y=x+2$. Накресліть графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

733. У саду посадили 48 дерев однаковими рядами з однаковою кількістю дерев у кожному ряду. Рядів виявилося на 8 менше, ніж дерев у кожному з них. Скільки було дерев у кожному ряду та скільки було рядів?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

734. Користуючись методом групування, розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-7x+10$;
2) y^2+3y-4;
3) $a^2+8a+12$;
4) x^2-x-6.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

735. Василь задумав три цифри x, y, z. Ольга називає три числа a, b, c. Василь повідомляє Ользі значення виразу $ax+by+cz$. Які числа **має назвати Ольга, щоб за отриманою від Василя інформацією визначити цифри, що той задумав?**

ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Яке з даних рівнянь не є квадратним?

А) $x^2=0$; В) $x^3+x=0$;
Б) $x^2+x=0$; Г) $x^2+x-2=0$.

Конспект уроку Вирави

2. Розв'яжіть рівняння $9x - x^2 = 0$.

А) $-3;\ 0;\ 3;$ В) $-3;\ 3;$
Б) $0;\ 3;$ Г) $0;\ 9.$

3. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2 - x}{6} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{3-x}{2}$.

А) $0;\ 5;$ Б) $5;$ В) $\sqrt{5};$ Г) $-\sqrt{5};\ \sqrt{5}.$

4. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $x^2 - 5x - 2 = 0;$ В) $x^2 - 2x + 5 = 0;$
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0;$ Г) $x^2 + 2x - 5 = 0.$

5. Скільки коренів має рівняння $6x^2 + 13x + 5 = 0$?

А) два; Б) безліч; В) жодного; Г) один.

6. Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 - 10x - 12 = 0$?

А) $10;$ Б) $-10;$ В) $-12;$ Г) $12.$

7. Чому дорівнює добуток коренів рівняння $3x^2 - 16x + 6 = 0$?

А) $6;$ Б) $2;$ В) $-16;$ Г) $\dfrac{16}{3}$.

8. При яких значеннях змінної набувають рівних значень вирази $(3x-1)(x+2)$ і $(x-12)(x-4)$?

А) $-12{,}5;\ 2;$ В) $-25;\ 4;$
Б) $12{,}5;\ -2;$ Г) $25;\ -4.$

9. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють $3-\sqrt{2}$ і $3+\sqrt{2}$.

А) $x^2 + 6x - 7 = 0;$ В) $x^2 + 6x + 7 = 0;$
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0;$ Г) $x^2 - 6x + 7 = 0;$

10. Розв'яжіть рівняння $x \mid x \mid - 9x - 10 = 0$.

А) $-1;\ 10;\ \dfrac{-9-\sqrt{41}}{2};\ \dfrac{-9+\sqrt{41}}{2};$ В) $-1;\ \dfrac{-9-\sqrt{41}}{2};$

Б) $10;\ \dfrac{-9-\sqrt{41}}{2};\ \dfrac{-9+\sqrt{41}}{2};$ Г) $-1;\ 10.$

11. Число -5 є коренем рівняння $2x^2 + 9x + c = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення c.

А) $x_2 = 0{,}5,\ c = -5;$ В) $x_2 = 9{,}5,\ c = 22{,}5;$
Б) $x_2 = -0{,}5,\ c = 5;$ Г) $x_2 = 9{,}5,\ c = -22{,}5.$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та множиною його коренів (А–Д).

Рівняння	Множина коренів
1) $x^2 - 3x + 4 = 0$	А) $\varnothing$
2) $x^2 - 3x - 4 = 0$	Б) $\{-1,-4\}$
3) $x^2 - 5x + 4 = 0$	В) $\{-1, 4\}$
	Г) $\{1, -4\}$
	Д) $\{1, 4\}$

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 15 = 0$;
2) $2x^2 + 7x = 0$;
3) $x^2 + 11x - 12 = 0$;
4) $7x^2 - 16x + 4 = 0$;
5) $5x^2 - 14x + 10 = 0$;
6) $x^2 - 5x + 3 = 0$.

2.° Складіть зведене квадратне рівняння, сума коренів якого дорівнює -11, а добуток — числу 6.

3.• Одна зі сторін прямокутника на 3 см менша від другої сторони і на 6 см менша від діагоналі прямокутника. Знайдіть сторони прямокутника.

4.• Число -2 є коренем рівняння $3x^2 + bx - 20 = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і значення b.

5.•• При якому значенні a рівняння $5x^2 - 10x + a = 0$ має єдиний корінь?

6.•• Доведіть, що при будь-якому значенні m рівняння $x^2 - mx + m^2 + 2 = 0$ не має коренів.

КУРС СУЧАСНОЇ ШКОЛИ
Видавництво «Гімназія»

21. Квадратний тричлен

Означення:

Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Наведемо приклади многочленів, які є квадратними тричленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\quad x^2 + 7x;\quad x^2 - 5;\quad 3x^2.$$

Зазначимо, що ліва частина квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є квадратним тричленом.

Означення:

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 8$.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Значення виразу $D = b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.**

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$. Розкладемо його на множники методом групування (подібну вправу, 734, ви виконували під час підготовки до вивчення цього пункту).

Маємо:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x\,(x - 1) - 2\,(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$$

Про таке тотожне перетворення говорять, що квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$ розклали на **лінійні множники** $x - 1$ і $x - 2$.

КОПІЮВАННЯ ВИДАВНИЦТВО УГІ

Зв'язок між коренями квадратного тричлена та лінійними множниками, на які він розкладається, установлює така теорема.

Теорема 21.1:

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Доведення. Оскільки числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тоді $a\,(x - x_1)(x - x_2) = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2) =$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \blacktriangleleft$$

Зауваження. Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то вважають, що квадратний тричлен має два рівних корені, тобто $x_1 = x_2$. У цьому випадку розклад квадратного тричлена на лінійні множники має такий вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2.$$

Теорема 21.2:

Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.

Доведення. Припустимо, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на лінійні множники. Тоді існують такі числа k, m і n, при яких виконується рівність $ax^2 + bx + c = k\,(x - m)(x - n)$. Звідси отримуємо, що m і n — корені даного квадратного тричлена. Отже, його дискримінант невід'ємний, що суперечить умові. ◀

ПРИКЛАД 1. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені даного тричлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Отже, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Маємо:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Отже, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Маємо:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тоді $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. ◀

ПРИКЛАД 2. Скоротіть дріб $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником даного дробу. Розв'язавши рівняння $6a^2 - a - 1 = 0$, отримуємо: $a_1 = -\frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{2}$.

Тепер можна записати:

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a + 1)(2a - 1).$$

Тоді отримуємо: $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}$.

Відповідь: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$. ◀

ПРИКЛАД 3. При якому значенні m розклад на множники тричлена $2x^2 + 9x + m$ містить множник $(x + 5)$?

Розв'язання. Оскільки розклад даного тричлена на множники має містити множник $(x + 5)$, то один із коренів цього тричлена дорівнює -5.

Тоді маємо:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$

$$m = -5.$$

Відповідь: $m = -5$. ◀

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ «ГІМНАЗІЯ»

1. Який многочлен називають квадратним тричленом? **2.** Що називають коренем квадратного тричлена? **3.** Що називають дискримінантом квадратного тричлена? **4.** У якому випадку квадратний тричлен не має коренів? має один корінь? має два корені? **5.** У якому випадку квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники? **6.** За якою формулою квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники? **7.** У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?

ВПРАВИ

736.° Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - x - 12$; 2) $3x^2 - 16x + 5$; 3) $4x^2 + 28x + 49$.

737.° Чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 12x + 6$;
2) $3x^2 - 8x + 6$;
3) $2a^2 - 8a + 8$;
4) $-6b^2 + b + 12$?

738.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 7x + 12$;
2) $x^2 + 8x + 15$;
3) $x^2 - 3x - 10$;
4) $-x^2 - 5x - 6$;
5) $-x^2 + x + 2$;
6) $6x^2 - 5x - 1$;
7) $4x^2 + 3x - 22$;
8) $-3a^2 + 8a + 3$;
9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$.

739.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 3x - 18$;
2) $x^2 + 5x - 14$;
3) $-x^2 + 3x + 4$;
4) $5x^2 + 8x - 4$;
5) $2a^2 - 3a + 1$;
6) $4b^2 - 11b - 3$.

740.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 2) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$; 3) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$.

741.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$; 2) $\frac{2x + 12}{x^2 + 3x - 18}$; 3) $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 7x}$.

742.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 9a - 18}$; 3) $\frac{c^2 - 5c - 6}{c^2 - 8c + 12}$; 5) $\frac{x^2 - 16}{32 - 4x - x^2}$;

2) $\frac{2b^2 - 7b + 3}{4b^2 - 4b + 1}$; 4) $\frac{m^3 - 1}{m^2 + 9m - 10}$; 6) $\frac{4n^2 - 9n + 2}{2 + 9n - 5n^2}$.

Копія видавництва

743.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 2) $\dfrac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$; 3) $\dfrac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

744.°° При якому значенні b розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-5x+b$ містить множник $(x-3)$;
2) $-4x^2+bx+2$ містить множник $(x+1)$;
3) $3x^2-4x+b$ містить множник $(3x-2)$?

745.°° При якому значенні a розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-7x+a$ містить множник $(x-4)$;
2) $4x^2-ax+6$ містить множник $(2x+1)$?

746.°° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\dfrac{a-2}{3a+2}+\dfrac{a-1}{1-2a}$;

2) $\dfrac{b-4}{b^3-b}:\left(\dfrac{b-1}{2b^2+3b+1}-\dfrac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\dfrac{c+2}{c^2-c-6}-\dfrac{2c}{c^2-6c+9}\right):\dfrac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$.

747.°° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\dfrac{25a^2-36}{10a^2-9a+2}:\dfrac{5a+6}{5a-2}+\dfrac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{4}{a^2+2a-3}\right):\dfrac{2a+1}{a+3}$.

748.°° Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{3x^2-10x+3}{x-3}-\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

749.°° Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$;

2) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}-\dfrac{x^2-x-30}{x+5}$.

750.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-6xy+5y^2$; 3) $3m^2-8mn-3n^2$;
2) $a^2+5ab-36b^2$; 4) $4x^2-5xy+y^2$.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

751.* Розкладіть на множники многочлен:
1) $a^2 - 14ab + 40b^2$; 2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

752.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:
1) $(a^2 - a - 6)\,x = a^2 - 9$;
2) $(a^2 - 8a + 7)\,x = 2a^2 - 13a - 7$.

753.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння
$(a^2 + 7a - 8)\,x = a^2 + 16a + 64$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

754. На рисунку 46 зображено графік стану банківського рахунку вкладниці протягом року. Установіть:
1) у які моменти банківський рахунок мав нульовий баланс;
2) у які місяці баланс банківського рахунку був від'ємним;
3) у які місяці баланс банківського рахунку був додатним.

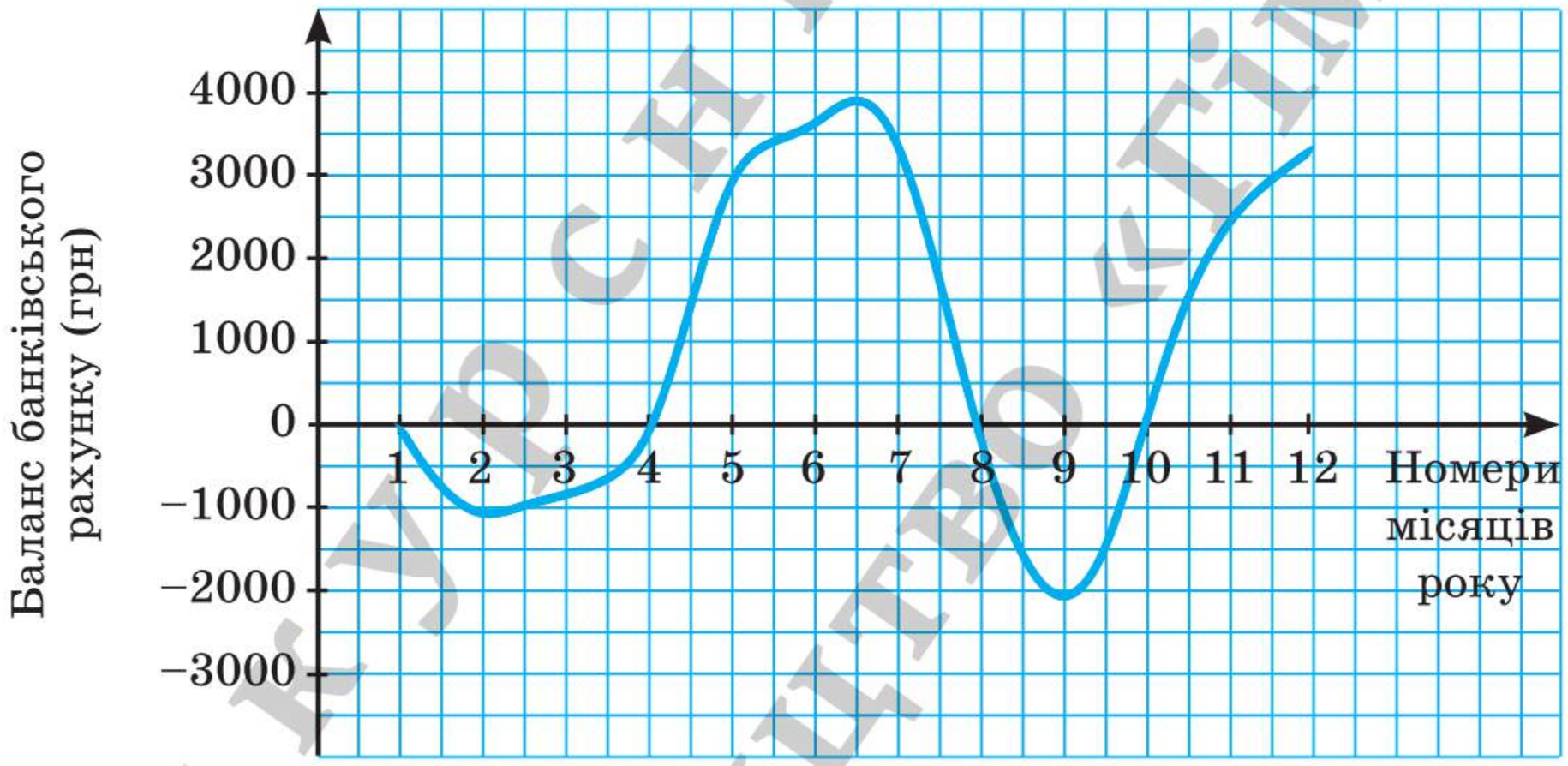


Рис. 46

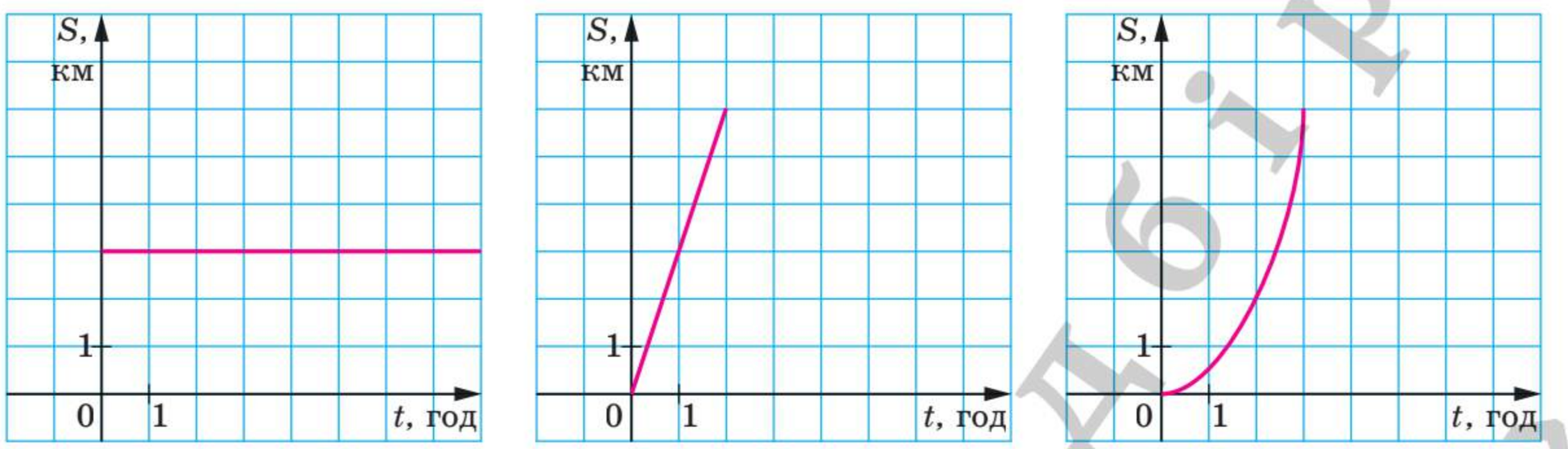
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

755. В одному мегабайті міститься 2^{10} кілобайтів. Скільки кілобайтів у 32 мегабайтах?

756. Який із графіків, поданих на рисунку 47, є графіком руху пішохода, котрий ішов зі сталою швидкістю? Визначте швидкість руху цього пішохода.

757. Змішали 2 л молока жирністю 8 % і 3 л молока жирністю 6 %. Яка жирність утвореної суміші?

Комунальний заклад «Дніпровський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» ДОР
Придбано в інтернет-магазині «Книгарня»



а) б) в)

Рис. 47

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

758. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$; 3) $(4x + 1)^2 = 9$; 5) $\sqrt{x} = 9$;

2) $x^2 = -9$; 4) $(x - 1)^2 = 5$; 6) $\sqrt{x} = -9$.

759. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2}$; 3) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1$;

2) $\frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1$; 4) $\frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

760. Розглядають усі прямокутники, довжини сторін яких — натуральні числа. Яких прямокутників більше: з периметром 1000 чи з периметром 1002?

22. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Підставивши в задане рівняння замість x^2 і x^4 відповідно t і t^2, отримаємо квадратне рівняння зі змінною t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

$$x^2 = 4 \quad \text{і} \quad x^2 = 9.$$

Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь можна записати двома способами: -2; 2; -3; 3 або ± 2; ± 3. ◀

Означення:

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають **методом заміни змінної.**

Метод заміни змінної можна використовувати для розв'язування не лише біквадратних рівнянь.

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть рівняння $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати два таких рівняння:

$$(2x - 1)^2 = -2 \quad \text{і} \quad (2x - 1)^2 = 1.$$

Перше з них коренів не має. Із другого рівняння отримуємо:

$$2x - 1 = -1 \quad \text{або} \quad 2x - 1 = 1.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть рівняння $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$. Отримуємо: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Звідси $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Отримуємо два рівняння:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Копія книги з сайту видавництва «Мандрівець»

Оскільки $\sqrt{x} \geqslant 0$, то ці рівняння коренів не мають, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає. ◀

ПРИКЛАД 4. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2+2x}{x-6} = \dfrac{5x+18}{x-6}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2+2x = 5x+18, \\ x-6 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2-3x-18=0, \\ x \neq 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3 \text{ або } x=6, \\ x \neq 6; \end{cases} \qquad x=-3.$$

Відповідь: -3. ◀

ПРИКЛАД 5. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0;$$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7 \text{ або } x=-2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \qquad x=7.$$

Відповідь: 7. ◀

КОПІЮВАННЯ ЗАБОРОНЕНО «ГІМНАЗІЯ»

Яке рівняння називають біквадратним?

ВПРАВИ

761.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

762.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

763.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;
2) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0$;
3) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;
4) $\frac{x^2 - 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10}$;
5) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;
6) $\frac{x^2 + 10x}{x - 8} = \frac{12x + 48}{x - 8}$;
7) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;
8) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$.

764.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;
2) $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;
3) $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}$;
4) $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0$.

765.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

766.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

767.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x-3\sqrt{x}+2=0$;
2) $x-\sqrt{x}-12=0$;
3) $3x-10\sqrt{x}+3=0$;
4) $8\sqrt{x}+x+7=0$;
5) $6\sqrt{x}-27+x=0$;
6) $8x-10\sqrt{x}+3=0$.

768.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x-6\sqrt{x}+8=0$;
2) $x-5\sqrt{x}-50=0$;
3) $2x-3\sqrt{x}+1=0$.

769.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-9}=0$;
2) $\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^2+x}=0$;
3) $\dfrac{x^2-12x+35}{x^2-10x+25}=0$;
4) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+2x-3}=0$.

770.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-9x-10}{x^2-1}=0$;
2) $\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-6x+8}=0$.

771.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2y}{y-3}=\dfrac{3y+3}{y}$;
2) $\dfrac{3x+4}{x-3}=\dfrac{2x-9}{x+1}$;
3) $\dfrac{5x+2}{x-1}=\dfrac{4x+13}{x+7}$;
4) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=3x-4$.

772.• Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{2x-13}{x-6}=\dfrac{x+6}{x}$;
2) $\dfrac{3x^2-4x-20}{x+2}=2x-5$.

773.• Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{5x+18}{x-2}=x$;
2) $5-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{18}{x}$;
3) $\dfrac{10}{x+2}+\dfrac{9}{x}=1$;
4) $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{2x+18}{x^2-9}$;
5) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{10}{x^2-5x}=\dfrac{3-x}{x-5}$;
6) $\dfrac{4x}{x^2+4x+4}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x}$;

Комунальний вищий навчальний заклад «Київський університет імені Бориса Грінченка»

7) $\dfrac{6}{x^2-36}-\dfrac{3}{x^2-6x}+\dfrac{x-12}{x^2+6x}=0;$ 8) $\dfrac{x}{x+7}+\dfrac{x+7}{x-7}=\dfrac{63-5x}{x^2-49}.$

774.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-3x}{x+6}=6;$ 4) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{16}{x^2-4};$

2) $y-\dfrac{39}{y}=10;$ 5) $\dfrac{9}{x+3}+\dfrac{14}{x-3}=\dfrac{24}{x};$

3) $\dfrac{60}{x}-\dfrac{60}{x+10}=\dfrac{1}{5};$ 6) $\dfrac{3x}{x^2-10x+25}-\dfrac{x-3}{x^2-5x}=\dfrac{1}{x}.$

775.• При якому значенні змінної:

1) сума дробів $\dfrac{24}{x-2}$ і $\dfrac{16}{x+2}$ дорівнює 3;

2) значення дробу $\dfrac{42}{x}$ на $\dfrac{1}{4}$ більше за значення дробу $\dfrac{36}{x+20}$?

776.• При якому значенні змінної:

1) значення дробу $\dfrac{30}{x+3}$ на $\dfrac{1}{2}$ менше від значення дробу $\dfrac{30}{x}$;

2) значення дробу $\dfrac{20}{x}$ на 9 більше за значення дробу $\dfrac{20}{x+18}$?

777.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x-10}{x^3+1}+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{5x-1}{x^2-x+1};$

2) $\dfrac{6}{x^2-4x+3}+\dfrac{5-2x}{x-1}=\dfrac{3}{x-3}.$

778.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x+2}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+39}{x^3-8}=\dfrac{5}{x-2};$

2) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{8}{x^2+2x-3}.$

Копія учбового видання

779.$^{\cdot\cdot}$ Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $(x^2-2)^2-8(x^2-2)+7=0$;
2) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;
3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;
4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$.

780.$^{\cdot\cdot}$ Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$;
2) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{3x-1}=3\frac{1}{3}$.

781.$^{\cdot\cdot}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;
2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;
3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;
4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

782.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$;
2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;
3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;
4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.

783.* При яких значеннях a рівняння $\frac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ має єдиний корінь?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

784. Разове відвідування басейну коштує 90 грн. Також можна придбати абонемент, який дозволяє відвідувати басейн у будь-який день тижня. Такий абонемент на місяць коштує 900 грн, на шість місяців — 3600 грн, на рік — 6400 грн. Анастасія планує із січня почати відвідувати басейн двічі на тиждень.

1) Чи варто Анастасії придбати абонемент на місяць?
2) Чи варто їй придбати абонемент на рік, якщо восени вона має поїхати на стажування на три місяці в інше місто і не зможе відвідувати в цей час басейн?
3) Чи варто Анастасії за цих обставин придбати абонемент на 6 місяців?

Комунальне видавництво

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

ЖА1 **785.** Побудуйте графік функції

$$y=\begin{cases}-\dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ x^2, \text{ якщо } x\geqslant -2.\end{cases}$$

Використовуючи побудований графік, визначте, при яких значеннях a пряма $y=a$ має з цим графіком:
1) одну спільну точку;
2) дві спільні точки;
3) три спільні точки.

786. Яким числом, раціональним чи ірраціональним, є значення виразу $\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ МАТЕМАТИКУ

787. На екрані монітора комп'ютера записано число 1. Щосекунди комп'ютер додає до числа на екрані суму його цифр. Чи може через якийсь час на екрані з'явитися число 123 456 789?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Розв'язування рівнянь методом заміни змінної

У п. 22 ви ознайомилися з розв'язуванням рівнянь методом заміни змінної. Розглянемо ще кілька прикладів, які ілюструють ефективність цього методу.

ПРИКЛАД 1. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x^2-3x-6}{x}=t.$

Тоді $\dfrac{8x}{x^2-3x-6}=\dfrac{8}{t}.$

Копія видання

Отримуємо рівняння $t-\frac{8}{t}=-2$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} t^2+2t-8=0, \\ t\neq 0. \end{cases}$

Звідси $t_1=-4$, $t_2=2$.

Тепер розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4$;

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2$.

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: -3; -1; 2; 6. ◀

ПРИКЛАД 2. Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0.$$

Розв'язання. Перетворимо це рівняння:

$$(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+5+4=0;$$

$$(2x^2+3x-1)^2-5\,(2x^2+3x-1)+4=0.$$

Нехай $2x^2+3x-1=t$. Тоді $t^2-5t+4=0$.

Звідси $t_1=1$, $t_2=4$.

Отже, $2x^2+3x-1=1$ або $2x^2+3x-1=4$.

Розв'язавши ці два рівняння, отримуємо відповідь.

Відповідь: -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1. ◀

ПРИКЛАД 3. Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки легко переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, поділивши обидві частини даного рівняння на x^2, перейдемо до рівносильного рівняння

$$\frac{2x^2-3x+1}{x}\cdot\frac{2x^2+5x+1}{x}=9.$$

Звідси $\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9$.

Зробимо заміну: $2x+\frac{1}{x}-3=t$. Тоді $2x+5+\frac{1}{x}=t+8$. Отримуємо рівняння $t\,(t+8)=9$. Звідки $t_1=1$, $t_2=-9$.

Комунальний заклад «Видавництво «Гімназія»

З урахуванням заміни отримуємо два рівняння:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1$;

2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9$.

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$. ◀

ПРИКЛАД 4. Розв'яжіть рівняння

$$7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

Розв'язання. Нехай $x + \frac{1}{x} = t$. Тоді $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$. Звідси

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Така заміна дає змогу переписати початкове рівняння таким чином:

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9;$$
$$2t^2 - 7t + 5 = 0.$$

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$. Отже, $x + \frac{1}{x} = 1$ або $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2. ◀

ПРИКЛАД 5. Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки можна переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Отже, можна розділити обидві частини рівняння на x^2. Отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10.$$

Заміна $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводить до квадратного рівняння

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; -1; -2. ◀

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО "ТИМНАЗІЯ"

Може виникнути запитання: чому під час розв'язування прикладів 1–5 ми не пробували спростити рівняння за допомогою тотожних перетворень?

Річ у тім, що, виконавши тотожні перетворення, ми стикнулися б із необхідністю розв'язувати рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (ви можете переконатися в цьому самостійно). При $a \neq 0$ таке рівняння називають **рівнянням четвертого степеня,** при $a = 0$ і $b \neq 0$ — **рівнянням третього степеня.** Окремим видом рівняння четвертого степеня при $b = 0$ і $d = 0$ є біквадратне рівняння. Його ви розв'язувати вмієте.

У загальному випадку для розв'язування рівнянь третього й четвертого степенів необхідно знати формули знаходження їхніх коренів. З історією відкриття цих формул ви можете ознайомитися в наступному оповіданні.

ВПРАВИ

Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

2) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

3) $x\,(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$

4) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$

5) $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 4;$

6) $2\,(x^2 + x + 1)^2 - 7\,(x-1)^2 = 13\,(x^3 - 1);$

7) $(x-6)^4 + (x-4)^4 = 82.$

Таємна зброя Сципіона дель Ферро

Ви легко розв'яжете кожне з таких рівнянь третього степеня:

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad x^3 - x = 0.$$

Усі вони є окремими видами рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c і d — деякі числа, причому $a \neq 0$. Вивести формулу його коренів — задача складна. Недарма появу цієї формули вважають видатним математичним відкриттям XVI століття.

Конкурс на видавництво «Тіні забутих предків»

Першим винайшов розв'язання рівняння виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, італійський математик Сципіон дель Ферро (1465–1526). Знайдену формулу він зберігав у секреті. Це було зумовлено тим, що кар'єра вченого того часу багато в чому залежала від його виступів у публічних математичних турнірах. Тому було вигідно зберігати відкриття в таємниці, розраховуючи використати їх у математичних змаганнях як секретну зброю.

Після смерті дель Ферро його учень Фіоре, володіючи секретною формулою, викликав на математичний двобій талановитого математика-самоучку Нікколо Тарталья. За кілька днів до турніру Тарталья сам вивів формулу коренів рівняння третього степеня. Диспут, на якому Тарталья здобув переконливу перемогу, відбувся 20 лютого 1535 року.

Уперше секретну формулу було опубліковано в книжці відомого італійського вченого Джероламо Кардано «Велике мистецтво». У цій роботі також описано метод розв'язування рівняння четвертого степеня, відкритий Людовіко Феррарі (1522–1565).

У XVII–XVIII ст. зусилля багатьох провідних математиків зосередилися на пошуку формули для розв'язання рівнянь п'ятого степеня. Отриманню результату сприяли роботи італійського математика Паоло Руффіні (1765–1822) та норвезького математика Нільса Хенріка Абеля. Сам результат виявився цілком несподіваним: було доведено, що не існує формули, за допомогою якої можна виразити корені будь-якого рівняння п'ятого й вищого степенів через коефіцієнти рівняння, використовуючи лише чотири арифметичні дії та дію добування кореня.



Нікколо Тарталья
(1499–1557)



Джероламо Кардано
(1501–1576)



Нільс Хенрік Абель
(1802–1829)

Комунальний заклад «Харківська гімназія»

23. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

У п. 7 ви вже ознайомилися із задачами, у яких раціональні рівняння слугували математичними моделями реальних ситуацій. Тепер, коли ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння, можна істотно розширити коло задач, які розглядаються.

ПРИКЛАД 1. Із пункту A виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього в тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту A. Знайдіть швидкість велосипедиста та швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки на 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

Розв'язання. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість вантажівки становить $(x+18)$ км/год. Велосипедист проїжджає 15 км за $\frac{15}{x}$ год, а вантажівка — за $\frac{15}{x+18}$ год. Різниця $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}$ показує, на скільки годин вантажівка проїжджає 15 км швидше, ніж велосипедист. Оскільки вантажівка проїхала 15 км на 45 хв, тобто на $\frac{3}{4}$ год, швидше, ніж велосипедист, то отримуємо рівняння $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4}$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x}-\frac{5}{x+18}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x(x+18)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2+18x-360=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -18. \end{cases}$$

Розв'язавши квадратне рівняння системи, отримаємо $x = 12$ або $x = -30$.

Корінь -30 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 12 км/год, а швидкість вантажівки становить: $12 + 18 = 30$ (км/год).

Відповідь: 12 км/год, 30 км/год. ◀

ПРИКЛАД 2. Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 год їхньої спільної роботи ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 год більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за x год, тоді другій для цього потрібно $(x - 4)$ год. За 1 год перша бригада ремонтує $\frac{1}{x}$ частину дороги, а друга — $\frac{1}{x-4}$ частину дороги. Перша бригада працювала 9 год і відремонтувала $\frac{9}{x}$ дороги, а друга бригада працювала 2 год і відремонтувала відповідно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то можна скласти рівняння $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Отримане рівняння має два корені $x_1 = 12$ і $x_2 = 3$ (переконайтеся в цьому самостійно). Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за $3 - 4 = -1$ (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 год, а друга — за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год. ◀

ПРИКЛАД 3. Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилася на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

Розв'язання. Нехай початковий розчин містив x г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x + 120)$ г, а концентрація солі становила $\frac{x}{x+120}$. Після того як до розчину додали 10 г солі, її маса в розчині склала $(x + 10)$ г, а маса розчину — $(x + 130)$ г.

Тепер концентрація солі становить $\frac{x+10}{x+130}$, що на 5 %, тобто на $\frac{1}{20}$, більше, ніж $\frac{x}{x+120}$. Звідси можна записати:

$$\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}.$$

Отримане рівняння має два корені: $x_1=30$ і $x_2=-280$ (переконайтеся в цьому самостійно), з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 30 г солі.

Відповідь: 30 г. ◀

ГОВОРИМО ТА ПИШЕМО УКРАЇНСЬКОЮ ПРАВИЛЬНО

Запам'ятайте. У числівниках *шістнадцять*, *шістдесят*, *шістсот* літеру **т** пишемо, але не вимовляємо в усному мовленні: [ш'існац':ат'], [ш'іздеᵘс'ат], [ш'іс:от].

ВПРАВИ

788.• Відстань між селищами Седнів і Козелець Чернігівської області дорівнює 90 км. Антон і Марина виїхали одночасно на мотоциклах із Седнева до Козельця, щоб оглянути відому перлину архітектури — собор Різдва Богородиці. Оскільки Антон їхав зі швидкістю на 10 км/год більшою за швидкість руху Марини, то він приїхав у Козелець на 18 хв раніше за неї. Знайдіть швидкість кожного з них.



Собор Різдва Богородиці (м. Козелець)



Найбільший у Європі плавучий фонтан (м. Вінниця)

789. Перші 150 км дороги з міста Бердичів (Житомирська область) до міста Ковель (Волинська область) автомобіль проїхав з певною швидкістю, а решту 240 км — зі швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях із Бердичева до Ковеля він витратив 5 год.

790. Із Тернополя до Вінниці, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус рухався зі швидкістю на 20 км/год меншою, ніж автомобіль, і прибув до Вінниці на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість автобуса.

791. Операторка комп'ютерного набору мала за деякий час набрати 180 сторінок тексту. Проте вона виконала цю роботу на 5 год раніше строку, оскільки набирала щогодини на 3 сторінки більше, ніж планувала. Скільки сторінок вона набирала щогодини?

792. Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий перекачує 100 м^3. Скільки кубічних метрів води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?

793. Робітник мав за певний час виготовити 72 деталі. Проте щодня він виготовляв на 4 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше строку. За скільки днів він виконав роботу?

794. Катер пройшов 16 км за течією річки та 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.

795. Човен проплив 15 км за течією річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

796. За течією річки від пристані відплив пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відчалив човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

797. Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок із цього озера, за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

Копія. Видавництво

798.• Дві робітниці, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожна з них, працюючи самостійно, якщо одній із них для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другій?

799.• Одному маляру потрібно на 5 год більше, ніж другому, щоби пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилося, що пофарбовано 40 % площі фасаду. За який час може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

800.• Першого дня трактористка орала поле 6 год. Другого дня до неї приєдналася друга трактористка, і через 8 год спільної роботи вони закінчили оранку. За скільки годин може зорати це поле кожна трактористка, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 3 год менше, ніж другій?

801.• До розчину, який містив 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

802.• Зливок сплаву міді та цинку, який містив 10 кг цинку, сплавили з 10 кг міді. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві виявився на 5 % більшим, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий зливок сплаву?

803.•• Через 2 год 40 хв після відправлення плота від пристані A за течією річки назустріч йому від пристані B відійшов катер. Знайдіть швидкість течії річки, якщо пліт і катер зустрілися на відстані 14 км від пристані A, швидкість катера в стоячій воді дорівнює 12 км/год, а відстань між пристанями A і B становить 32 км.

804.•• До басейну підведено дві труби. Через одну трубу воду наливають у басейн, а через другу зливають, причому для зливу води потрібно на 1 год більше, ніж для наповнення басейну. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

805.•• Для наповнення басейну через першу трубу потрібно стільки ж часу, як і для наповнення через другу й третю труби одночасно. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год швидше, ніж через другу, і на 8 год швидше, ніж через третю. Скільки часу потрібно для наповнення басейну через кожну трубу?

806.$^{\bullet\bullet}$ Автобус мав проїхати відстань між двома містами, яка дорівнює 400 км, з деякою швидкістю. Проїхавши 2 год із запланованою швидкістю, він зупинився на 20 хв і, щоби прибути в пункт призначення вчасно, збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?

807.$^{\bullet\bullet}$ Робітник за певний час мав виготовити 360 деталей. Перші 5 днів він щоденно виготовляв заплановану кількість деталей, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше, і вже за день до строку виготовив 372 деталі. Скільки деталей щодня мав виготовляти робітник за планом?

808.* Щоб виконати певне виробниче завдання, першій робітниці потрібно на 12 год менше, ніж другій, і на 4 год більше, ніж обом робітницям для спільного виконання завдання. За скільки годин може виконати це завдання перша робітниця?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

809. Обчисліть:

1) $\dfrac{7^{-4}\cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 2) $(27\cdot 3^{-4})^2$; 3) $(10^9)^2\cdot 1000^{-6}$.

810. Знайдіть значення виразу $a^2-2a\sqrt{5}+2$ при $a=\sqrt{5}-3$.

811. Побудуйте графік функції $y=-2x+4$.

1) Чому дорівнює нуль даної функції?
2) Укажіть значення x, при яких $y>0$.
3) Чи проходить графік функції через точку $M\,(-36;\,68)$?

812. При якому значенні k графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ проходить через точку $A\left(-\sqrt{12};\sqrt{3}\right)$? Побудуйте цей графік.

813. Яка з рівностей є правильною: $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt{3}-2$ або $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=2-\sqrt{3}$? Відповідь обґрунтуйте.

814. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 3) $(0{,}2a^{-1}b^2)^2\cdot 4a^5b^{-4}$.

2) $\left(\dfrac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$;

НАКУР С. І. ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

815. На тарілці лежать 9 шматочків сиру різної маси. Доведіть, що можна один із шматочків сиру розрізати на дві частини так, що одержані 10 шматочків можна буде розкласти на дві тарілки й при цьому маса сиру на кожній із них буде однаковою.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Перша ЕОМ в Європі

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки за останні десятиліття породив цілу низку нових математичних дисциплін і запропонував новий метод наукових і прикладних досліджень — моделювання процесів на електронних обчислювальних машинах (ЕОМ). (З деякими математичними моделями ви ознайомилися в пп. 7 та 23.)

Сьогодні важко уявити своє життя без комп'ютерів. І тим складніше повірити, що їхня історія налічує менше ніж сто років.

Перша у світі електронна обчислювальна машина ЕНІАК була створена в США наприкінці 40-х рр. XX ст. і використовувалася для розрахунків траєкторії польоту снарядів берегової артилерії.

А перша в континентальній Європі електронна обчислювальна машина була створена в Києві.

Наприкінці 1947 р. лабораторія спецмоделювання і електронної техніки Інституту електротехніки Академії наук



Будинок у передмісті Києва — Феофанії, де було створено МЕСМ



С. О. Лебедєв
(1902–1974)

КОНТРОЛЬНИЙ ЕКЗЕМПЛЯР ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

України під керівництвом академіка С. О. Лебедєва розпочала роботу над створенням так званої «моделі електронної обчислювальної машини» (МЕСМ). І вже у грудні 1951 р. МЕСМ розв'язувала практичні задачі, які для неї програмували співробітники Інституту математики Академії наук України. Більше року МЕСМ була не тільки першою, а й єдиною ЕОМ у континентальній Європі.

У 1957 р. було створено Обчислювальний центр Академії наук України, який у 1962 р. був перетворений в Інститут кібернетики. Засновник інституту академік Віктор Михайлович Глушков до 1982 р. був його директором.

Перші задачі, для розв'язування яких були застосовані ЕОМ, задовольняли потреби атомної та ракетної техніки. За допомогою ЕОМ проводили розрахунки траєкторій пілотних і безпілотних систем у реальному масштабі часу, вибір оптимальних конструкцій серед множини можливих варіантів. Такі задачі є характерними для швидкодіючих комп'ютерів і в наш час.

Інститут кібернетики був колискою вітчизняних наукових кадрів у галузі кібернетики, інформатики, обчислювальної техніки. Наукові здобутки його співробітників відомі в усьому світі. І сьогодні засади побудови елементної бази обчислювальної техніки, математичного моделювання, теорії автоматів, автоматизованих систем керування, інших комп'ютерних дисциплін багато в чому ґрунтуються на працях українських науковців. Учені інституту заснували всесвітньо відомі наукові школи з математичної кібернетики та теорії обчислювальних машин і систем, теорії оптимізації та системного аналізу,



В. М. Глушков
(1923–1982)



Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Копія для ознайомлення

математичного моделювання, математичної теорії надійності, теорії програмування тощо.

У 1992–1997 рр. на базі автономних підрозділів Інституту кібернетики створено Інститут програмних систем Національної академії наук (НАН) України, Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, Інститут космічних досліджень НАН України та Національну космічну агенцію (НКА) України, Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Міністерства освіти і науки (МОН) України та НАН України, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН України та МОН України, які ввійшли до складу створеного в 1992 р. Кібернетичного центру НАН України.

ЗАВДАННЯ № 6 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Завдання 1–11 мають по чотири варіанти відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді.

1. Знайдіть корені квадратного тричлена $5x^2 - x - 6$.

А) 2; −0,6; В) 1; −1,2;
Б) −2; 0,6; Г) −1; 1,2.

2. Розкладіть на множники квадратний тричлен $-x^2 - 4x + 5$.

А) $(x-1)(x+5)$; В) $-(x-1)(x+5)$;
Б) $(x+1)(x-5)$; Г) $-(x+1)(x-5)$.

3. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$.

А) $\dfrac{x+4}{x-2}$; Б) $\dfrac{x-4}{x-2}$; В) $\dfrac{x+4}{x+2}$; Г) $\dfrac{x-4}{x+2}$.

4. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

А) −3; 3; В) $-3;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 3$;
Б) $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2};\ 3$.

5. Знайдіть корені рівняння $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.

А) −1; 1; 3; 5; Б) −1; 5; В) 1; 3; Г) 1; 3; 5.

6. Розв'яжіть рівняння $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

А) −3; 4; Б) −2; 2; В) 16; Г) 9; 16.

Комунальне видавництво «Харківський університет імені В. Н. Каразіна»

7. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{3x-1}{x}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{10-9x}{x^2-2x}$.

А) $-\dfrac{4}{3}$; 2; Б) $\dfrac{4}{3}$; -2; В) $-\dfrac{4}{3}$; Г) 2.

8. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 350 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля, через що вона прибула до пункту призначення на 2 год пізніше за легковий автомобіль. Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x+20}=2$; В) $\dfrac{350}{x+20}-\dfrac{350}{x}=2$;

Б) $\dfrac{350}{x}+\dfrac{350}{x+20}=2$; Г) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x-20}=2$.

9. Катер проплив 30 км за течією річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 10 хв. Швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.
Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; В) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x}=3\dfrac{1}{6}$;

Б) $\dfrac{30}{x+1}-\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; Г) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3\dfrac{1}{6}$.

10. Робітниця мала за деякий час виготовити 96 деталей. Щодня вона виготовляла на 2 деталі більше, ніж планувала, і закінчила роботу на 4 дні раніше строку.
Нехай робітниця виготовляла щодня x деталей. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\dfrac{96}{x}-\dfrac{96}{x-2}=4$; В) $\dfrac{96}{x}-\dfrac{96}{x-4}=2$;

Б) $\dfrac{96}{x-2}-\dfrac{96}{x}=4$; Г) $\dfrac{96}{x-4}-\dfrac{96}{x}=2$.

11. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке виробниче завдання за 10 год, причому перший із них може виконати це завдання самостійно на 15 год швидше за другого.

Нехай перший робітник може самостійно виконати завдання за x год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{15}{x}+\frac{15}{10-x}=1$;

Б) $\frac{15}{x}+\frac{15}{x-10}=1$;

В) $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+15}=1$;

Г) $\frac{10}{x}+\frac{10}{x-15}=1$.

У завданні 12 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

12. Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та множиною його коренів (А–Д).

Рівняння	**Множина коренів**
1) $\frac{x-4}{x^2-5x+4}=0$	А) $\{-10, 1\}$
2) $\left(\sqrt{x}-1\right)(x^2+9x-10)=0$	Б) $\{1\}$
3) $\frac{x^2+6x-40}{x-4}=0$	В) $\{-10\}$
	Г) $\{-10, 4\}$
	Д) $\varnothing$

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.° Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2-5x-24$; 2) $2x^2-7x+3$.

2.° Розв'яжіть рівняння:
1) $x^4-6x^2-7=0$; 2) $\frac{x^2+5x}{x+8}=\frac{24}{x+8}$.

3.• Скоротіть дріб $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$.

4.• Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4}-\frac{x+4}{10x-5x^2}=0$.

5.• Перший насос наповнив водою басейн об'ємом $180\,м^3$, а другий — басейн об'ємом $240\,м^3$. Перший насос перекачував щогодини на $10\,м^3$ води менше, ніж другий,

Комунальний вищий державний навчальний заклад «Видавничий коледж імені Івана Огієнка»

і працював на годину більше, ніж другий. Який об'єм води перекачував за годину кожний насос?

6.•• Побудуйте графік функції $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} - \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Рівняння першого степеня

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають рівнянням першого степеня.

Квадратне рівняння

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним рівнянням.

Зведене квадратне рівняння

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним.

Неповне квадратне рівняння

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Розв'язування неповного квадратного рівняння

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{b}{a}$
$b = 0,\ -\dfrac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0,\ -\dfrac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ІМНАЗІЯ»

Дискримінант квадратного рівняння

Для рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, його дискримінант D — це значення виразу $b^2 - 4ac$.

Розв'язування квадратного рівняння

Якщо $D < 0$, то квадратне рівняння коренів не має.

Якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Теорема Вієта

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обернена до теореми Вієта

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратний тричлен

Многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним тричленом.

Розклад квадратного тричлена на множники

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює нулю, то такий тричлен можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Біквадратне рівняння

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.

КОМУНАЛЬНИЙ ВИДАВНИЧИЙ ЦЕНТР «Академія»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

1. Раціональні вирази

816. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3m-n}{m+2n}$, якщо $m=-4$, $n=3$;

2) $\dfrac{a^2-2a}{4a+2}$, якщо $a=-0{,}8$.

817. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{5}{2-y}$;

2) $\dfrac{m-3}{7}$;

3) $\dfrac{3+t}{4-t}$;

4) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x-6}$;

5) $\dfrac{x-2}{|x|+7}$;

6) $\dfrac{4}{x^2-25}$;

7) $\dfrac{3}{|x|-5}$;

8) $\dfrac{x}{8+\dfrac{4}{x}}$;

9) $\dfrac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

818. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$; 2) $\dfrac{25mn^2}{75m^8n}$; 3) $\dfrac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$; 4) $\dfrac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$.

819. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть отриманий дріб:

1) $4mn^2p : (28m^2np^6)$; 2) $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$.

820. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3x-6y}{3x}$;

2) $\dfrac{3a+9b}{4a+12b}$;

3) $\dfrac{a^2-49}{3a+21}$;

4) $\dfrac{12x^2-4x}{2-6x}$;

5) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;

6) $\dfrac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$.

821. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, якщо $x=-0{,}2$, $y=0{,}5$;

2) $\dfrac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, якщо $2x-7y=-0{,}5$.

Копія з видавничої системи «Підручники і посібники»

822. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $(a+2)\,x=7$;
2) $(a+6)\,x=a+6$;
3) $(a+3)\,x=a^2+6a+9$;
4) $(a^2-4)\,x=a-2$.

823. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7a}{22}+\frac{4a}{22}$;
2) $\frac{8x}{3y}-\frac{5x}{3y}$;
3) $\frac{7x-2y}{15p}+\frac{3x+7y}{15p}$;
4) $\frac{a}{8}-\frac{a-b}{8}$;
5) $\frac{7p-17}{5k}+\frac{7-2p}{5k}$;
6) $\frac{6a^2-4a}{15a}-\frac{a^2+a}{15a}$;
7) $\frac{x-y}{8}+\frac{x+y}{8}$;
8) $\frac{10x-6}{x}-\frac{4x+11}{x}$.

824. Спростіть вираз:

1) $\frac{7y}{y^2-4}-\frac{14}{y^2-4}$;
2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2}-\frac{7y-25}{25-y^2}$;
3) $\frac{9p+5}{3p+6}-\frac{10p-12}{3p+6}+\frac{9p-1}{3p+6}$;
4) $\frac{7x+5}{3-x}+\frac{5x+11}{x-3}$;
5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4}+\frac{(a-3)^2}{4-4a}$;
6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2}-\frac{x-4}{(x-2)^2}$;
7) $\frac{7}{a-2}-\frac{b}{2-a}$;
8) $\frac{6a}{5-a}-\frac{4a}{a-5}$.

825. Виконайте дії:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$;
2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$;
3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$;
4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

826. Виконайте дії:

1) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;
2) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;
3) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;
4) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;
5) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;
6) $2-\frac{14}{m-2}-m$.

827. Доведіть тотожність

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(a-b)(c-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-a)}=0.$$

Комунальне видавництво «Підручник і й Видавничий дім «Школяр»

828. Запишіть дріб у вигляді суми цілого виразу та дробу:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

829. Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

830. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є натуральним числом значення виразу:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$;

2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

831. Виразіть змінну x через інші змінні, якщо:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

832. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

833.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

834.* Доведіть, що коли $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ або $c=0$.

835. Виконайте множення:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$; 4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$; 5) $\frac{24t^7}{16u^3}\cdot 34u^5$;

3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$; 6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b}\cdot\frac{21xb^2}{10y^3a^2}\cdot\frac{25a^5y}{3x^4b}$.

836. Виконайте множення:

1) $\frac{2xy-y^2}{9}\cdot\frac{36}{y^4}$; 2) $\frac{a^2-7ab}{a^2+2ab}\cdot\frac{a^2b+2ab^2}{a^3-7a^2b}$;

КОПІЯ КУРСУ СТВОРЕНА ВИДАВНИЦТВОМ «КЛАСС»

3) $\dfrac{m^2-64}{m^3-9m^2}\cdot\dfrac{m^2-81}{m^2+8m}$;

4) $\dfrac{2x^2-16x+32}{3x^2-6x+12}\cdot\dfrac{x^3+8}{4x^2-64}$.

837. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\dfrac{a^5}{x^4}\right)^2$;

2) $\left(-\dfrac{4y}{3m^2}\right)^4$;

3) $\left(-\dfrac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

838. Виконайте ділення:

1) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-100}:\dfrac{x-5}{x-10}$;

2) $\dfrac{a^2-1}{a-8}:\dfrac{a^2+2a+1}{a-8}$;

3) $\dfrac{ab+b^2}{8b}:\dfrac{ab+a^2}{2a}$;

4) $\dfrac{2c-3}{c-1}:(2c-3)$;

5) $\dfrac{n^2-3n}{49n^2-1}:\dfrac{n^4-27n}{49n^2-14n+1}$;

6) $\dfrac{5a^2-20ab}{3a^2+b^2}:\dfrac{30(a-4b)^2}{9a^4-b^4}$.

839. Вважаючи дані дроби нескоротними, замініть x і y такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $\dfrac{x}{7a^2b^3}\cdot\dfrac{y}{4c}=\dfrac{6a^3c^2}{b}$;

2) $\dfrac{36m^2n^4}{x}:\dfrac{y}{35p^6}=\dfrac{21n}{5mp^3}$.

840. Дано: $3x-\dfrac{1}{x}=8$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

841. Дано: $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $2x-\dfrac{1}{x}$.

842. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\dfrac{16-a^2}{32a^3}$;

2) $\left(7x-\dfrac{4x}{x-3}\right):\dfrac{14x-50}{3x-9}$;

3) $\dfrac{2a}{a-2}+\dfrac{a+7}{8-4a}\cdot\dfrac{32}{7a+a^2}$;

4) $\left(\dfrac{9c}{c-8}+\dfrac{7c}{c^2-16c+64}\right):\dfrac{9c-65}{c^2-64}-\dfrac{8c+64}{c-8}$;

5) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

6) $\left(\dfrac{b}{b+6}+\dfrac{36+b^2}{36-b^2}-\dfrac{b}{b-6}\right):\dfrac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;

НТБ УрСРР «Видавництво «Ранок»

7) $\left(\dfrac{2x}{x^3+1}:\dfrac{1-x}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{4}:\dfrac{x-1}{x+1}$.

843. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу $\left(\dfrac{1}{(a-3)^2}-\dfrac{6}{9-a^2}+\dfrac{9}{(a+3)^2}\right):\dfrac{4(2a-3)^2}{(a^2-9)(a^2-27)}-\dfrac{2a^2}{9-a^2}$ не залежить від значення a.

844. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+\dfrac{25}{a+10}}{\dfrac{25}{a}-a}$;

2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

845. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x+6}{x+3}=2$;

2) $\dfrac{x^2-16}{x+4}=-8$;

3) $\dfrac{2x-9}{2x+5}+\dfrac{3x}{3x-2}=2$;

4) $\dfrac{5x^2+8}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$.

846. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+2}{x+a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x-1}=0$.

847. Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-3}+4^{-2}$;

2) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}+(-1{,}8)^0-5^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$;

4) $2^{-3}-6^{-1}+3^{-2}$.

848. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємними та нульовими показниками:

1) $\dfrac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4}$;

2) $\dfrac{1{,}001^0m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}$.

849. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a або добутку степенів з різними основами:

1) $a^{-7}\cdot a^{10}$;
2) $a^{-9}\cdot a^5$;
3) $a^{17}\cdot a^{-4}\cdot a^{-11}$;
4) $a^{-2}:a^3$;
5) $a^{12}:a^{-4}$;
6) $a^{-7}:a^{-11}$;
7) $a^{-12}:a^{-10}\cdot a^4$;
8) $(a^3)^{-5}$;
9) $(a^{-12})^{-2}$;
10) $(a^{-3})^4:(a^{-2})^5:(a^{-1})^{-7}$;
11) $(m^{-3}n^4p^7)^{-4}$;
12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;

Копія видавництва «Ранок»

13) $(x^3y^{-4})^5 \cdot (x^{-2}y^{-3})^3$;

14) $\left(\dfrac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3}$;

15) $\left(\dfrac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

850. Знайдіть значення виразу:

1) $11^{-23} \cdot 11^{25}$;

2) $3^{17} \cdot 3^{-14}$;

3) $4^{-16} : 4^{-12}$;

4) $10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2}$;

5) $(14^{-10})^5 \cdot (14^{-6})^{-8}$;

6) $\dfrac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^2}$.

851. Знайдіть значення виразу:

1) $25^{-3} \cdot 5^8$;

2) $64^{-3} : 32^{-3}$;

3) $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0{,}001)^{-5}$;

4) $\dfrac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$;

5) $\dfrac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$;

6) $\dfrac{(0{,}125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

852. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \dfrac{5}{9}x^4y^{-7}$;

2) $0{,}2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0{,}3a^{10}b^7 \cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$;

5) $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$;

6) $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0{,}1a^2b^{-3}c)^{-3}$;

7) $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\dfrac{1}{8}a^3b^{-3}\right)^{-3}$;

8) $\dfrac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \dfrac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$.

853. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $1{,}3 \cdot 10^4 + 1{,}8 \cdot 10^5$;

2) $1{,}5 \cdot 10^2 - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$;

3) $5{,}6 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^2$;

4) $4{,}8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$.

854. Функцію задано формулою $y = -\dfrac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4; 8; 1,2;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 24; -18; 60.

Видавництво «Ранок»

855. Побудуйте графік функції $y=\frac{6}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2; −1,5; 4;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: −2; 3; −4,5;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

856. Побудуйте графік функції $y=\frac{5}{|x|}$.

857. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\frac{4}{x}$ і $y=x-3$ та вкажіть координати точок їхнього перетину.

858. Знайдіть значення p, якщо відомо, що графік функції $y=\frac{p}{x}$ проходить через точку: 1) $A\,(-3;\ 2)$; 2) $B\left(-\frac{1}{7};3\right)$; 3) $C\,(-0{,}4;\ 1{,}6)$.

859. Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}-\frac{12}{x}, \text{ якщо } x\leqslant -3,\\ 1-x, \text{ якщо } x>-3;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}3x-1, \text{ якщо } x<2,\\ \frac{10}{x}, \text{ якщо } 2\leqslant x<5,\\ x-3, \text{ якщо } x\geqslant 5.\end{cases}$

860. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{4x+12}{x^2+3x}$;

2) $y=\frac{32-2x^2}{x^3-16x}$.

2. Квадратні корені. Дійсні числа

861. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4\sqrt{625}-\frac{1}{4}\sqrt{144}$;
2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}25}+\sqrt{2^4+9}$;
3) $3\sqrt{0{,}25}-\sqrt{7^2+24^2}$;
4) $\frac{1}{5}\sqrt{625}-\frac{3}{17}\sqrt{289}$.

862. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{1{,}69}$;

2) $\left(3\sqrt{15}\right)^2 - \left(15\sqrt{3}\right)^2$;

3) $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$.

863. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$;

2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;

3) $\sqrt{x} - 3 = 0$;

4) $2\sqrt{x} - 7 = 0$;

5) $\sqrt{x} + 5 = 0$;

6) $\sqrt{7x} - 4 = 0$;

7) $\sqrt{7x - 4} = 0$;

8) $\sqrt{7x - 4} = 2$;

9) $\frac{15}{\sqrt{x+4}} = 3$;

10) $\sqrt{4 + \sqrt{3 + x}} = 5$.

864. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{9 \cdot 100}$;

2) $\sqrt{0{,}49 \cdot 16}$;

3) $\sqrt{676 \cdot 0{,}04}$;

4) $\sqrt{0{,}64 \cdot 0{,}25 \cdot 121}$.

865. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{75 \cdot 234}$;

2) $\sqrt{2 \cdot 800}$;

3) $\sqrt{1{,}6 \cdot 12{,}1}$;

4) $\sqrt{2890 \cdot 2{,}5}$.

866. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{108} \cdot \sqrt{3}$;

2) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$;

3) $\sqrt{160} \cdot \sqrt{250}$;

4) $\sqrt{0{,}4} \cdot \sqrt{4{,}9}$;

5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;

6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0{,}225}}$.

867. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(17{,}1)^2}$;

2) $\sqrt{(-1{,}17)^2}$;

3) $\frac{1}{2}\sqrt{62^2}$;

4) $-2{,}4\sqrt{(-4)^2}$;

5) $\sqrt{11^4}$;

6) $\sqrt{(-23)^4}$;

7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$;

8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0{,}1)^2}$.

Комунальний вищий державний навчальний заклад «Київський фізико-математичний ліцей-гімназія»

868. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0{,}81a^6b^{10}}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;

2) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, якщо $x \leqslant 0$;

3) $\frac{1{,}2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, якщо $y > 0$, $x < 0$;

4) $-0{,}1x^2\sqrt{1{,}96x^{18}y^{16}}$, якщо $x \leqslant 0$.

869. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;

4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;

5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2}-\sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$.

870.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{26-6\sqrt{17}}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}$;

4) $\sqrt{46+10\sqrt{21}}+\sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

871. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{700}$; 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 7) $-1{,}6\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{0{,}32}$; 6) $-2{,}4\sqrt{600}$; 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

872. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{10a^2}$, якщо $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{15b^2}$, якщо $b \leqslant 0$;

3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$, якщо $y \neq 0$;

4) $\sqrt{36m^2n}$, якщо $m < 0$;

5) $\sqrt{4x^6y^5}$, якщо $x > 0$;

6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, якщо $b < 0$.

873. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{10}$; 3) $0{,}3\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; 7) $-0{,}5\sqrt{30}$;

2) $2\sqrt{13}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; 6) $-5\sqrt{7}$; 8) $4\sqrt{a}$.

874. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{5}$; 2) $b\sqrt{-b}$; 3) $x\sqrt{x^7}$; 4) $n\sqrt{m}$, якщо $n \leqslant 0$.

875. Порівняйте числа:

1) $5\sqrt{6}$ і $6\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{55}$ і $3\sqrt{6}$;

3) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{0{,}3}$;

4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ і $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

876. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a}+\sqrt{4a}-\sqrt{121a}$;

2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{320}$;

3) $6\sqrt{125a}-2\sqrt{80a}+3\sqrt{180a}$.

877. Виконайте множення:

1) $\left(\sqrt{80}-\sqrt{45}\right)\sqrt{5}$;

2) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{96}\right)\sqrt{6}$;

3) $\left(12-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)$;

4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$;

5) $\left(\sqrt{19}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{13}\right)$;

6) $\left(4\sqrt{m}+9\sqrt{n}\right)\left(4\sqrt{m}-9\sqrt{n}\right)$;

7) $\left(\sqrt{5x}+\sqrt{11y}\right)^2$;

8) $\left(3\sqrt{11}-2\sqrt{10}\right)^2$.

878. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$;

2) $\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$;

3) $\frac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$;

4) $\frac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;

5) $\frac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

6) $\frac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$.

879. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$.

880. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5}{4-3\sqrt{2}}-\frac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$;

3) $\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$.

881. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x}{x-9}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

Комунальний заклад «Видавництво «Академія»

882.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{x}+5)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

883.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

884.* Доведіть, що

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

885. Розташуйте в порядку зростання числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

886. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x-6$ та визначте координати точки їхнього перетину.

887. Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51{,}25}$?

888. Які цілі числа містяться на координатній прямій між числами:

1) 6 і $\sqrt{67}$;
2) $\sqrt{14}$ і $\sqrt{52}$;
3) $-\sqrt{53}$ і $-4{,}9$;
4) $-\sqrt{31}$ і 2,7?

889. Дано функцію $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, & \text{якщо } x<0,\\ 3, & \text{якщо } 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

3. Квадратні рівняння

890. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-4x-32=0$;
2) $x^2-10x+21=0$;
3) $6x^2-5x+1=0$;
4) $8x^2+2x-3=0$;
5) $x^2+6x-15=0$;
6) $3x^2-x-5=0$;
7) $4x^2+28x+49=0$;
8) $x^2-16x+71=0$.

Видавництво «Гімназія» НКУ ім. В. Сухомлинського

891. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x+2)-2\,(3x+1)(x-3)=x\,(x+27)$;
2) $(4x-3)^2+(3x-1)(3x+1)=9$;
3) $(x+4)(x^2+x-13)-(x+7)(x^2+2x-5)=x+1$;
4) $\dfrac{2(x^2-9)}{5}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-41}{4}$;
5) $\dfrac{x^2+5x}{3}-\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{2x^2-2}{8}$.

892.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+(5a-1)\,x+4a^2-a=0$;
2) $x^2-(2a+3)\,x+6a=0$;
3) $a^2x^2-10ax+16=0$.

893. Розв'яжіть рівняння:

1) $|\,x^2-2x-6\,|=6$;
2) $x^2-6\,|\,x\,|-16=0$;
3) $x\,|\,x\,|+2x-15=0$;
4) $\|\,x^2-6x-4\,|-3\,|=1$.

894. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-6x+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}-8$;
2) $\left(\sqrt{x}-5\right)(15x^2-7x-2)=0$;
3) $(x^2+6x)\left(\sqrt{x}-4\right)(x^2-8x-48)=0$.

895. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+6x+8}=0$;
2) $x^2-4x+4+|\,x^2-3x+2\,|=0$;
3) $\sqrt{25-x^2}+|\,x^2+8x-20\,|=0$.

896. Не обчислюючи дискримінанта, знайдіть, при якому значенні a рівняння:

1) $x^2+22x+a=0$;
2) $x^2-ax+81=0$

має єдиний корінь. Знайдіть цей корінь.

897. При якому значенні b коренями рівняння $x^2+bx-23=0$ є протилежні числа? Знайдіть ці корені.

898. Число $-\dfrac{1}{3}$ є коренем рівняння $12x^2-bx+5=0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

899. Число $0{,}2$ є коренем рівняння $8x^2-3{,}2x+k=0$. Знайдіть значення k і другий корінь рівняння.

Київський університет імені Бориса Грінченка
Видавництво «Гімназія»

900. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - bx + 20 = 0$ задовольняють умову $x_1 = 5x_2$. Знайдіть значення b і корені рівняння.

901. Складіть квадратне рівняння, корені якого менші від відповідних коренів рівняння $x^2 - 3x - 5 = 0$ на 1.

902. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 - 7x}{x+1} = \dfrac{8}{x+1}$;

2) $\dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \dfrac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;

3) $\dfrac{4 - x}{4x - 3} = \dfrac{2x - 2}{7 - x}$;

4) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-6} = \dfrac{7}{12}$;

5) $\dfrac{63}{x^2 + 3x} - \dfrac{2}{x^2 - 3x} = \dfrac{7}{x}$;

6) $\dfrac{2x}{x-2} + \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{4x - 2}{(x+4)(x-2)}$.

903. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{(3x-1)^2} - \dfrac{4x}{3x-1} - 5 = 0$;

2) $\dfrac{x-1}{x+5} + \dfrac{x+5}{x-1} = \dfrac{10}{3}$;

3) $\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x} + \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 6} = 3$;

4) $\dfrac{24}{x^2 + 2x - 8} - \dfrac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

904.* При яких значеннях a рівняння $\dfrac{x^2 - 2ax + 3}{x - 2} = 0$ має єдиний корінь?

905.* Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$. При якому значенні a виконується рівність $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

906.* При якому значенні a добуток коренів рівняння $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$ дорівнює 15?

907. Автобус мав проїхати 255 км. Проїхавши $\dfrac{7}{17}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю на 5 км/год меншою від початкової. Знайдіть початкову швидкість автобуса, якщо в пункт призначення він прибув через 9 год після виїзду.

908. У зливку сплаву міді та цинку міститься 20 кг цинку. До цього зливку додали 3 кг міді та 4 кг цинку. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві на 5 % більший, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У попередніх класах ви вже використовували комп'ютер під час вивчення математики. Ви навчилися:

- користуватися **калькулятором** для обчислень;
- набирати й оформляти нескладні тексти в **текстовому редакторі** (наприклад, *Microsoft Word*);
- складати таблиці за допомогою **редактора таблиць** (наприклад, *Microsoft Excel*);
- малювати за допомогою **графічного редактора** (наприклад, *Paint*);
- користуватися глобальною мережею **«Інтернет»** і шукати в ній інформацію.

Усі ці вміння ви вдосконалюватимете й надалі.

Якщо в майбутньому ви плануєте отримати освіту в галузі математики, інформаційних технологій, інженерної справи, тобто широко використовувати математику у своїй діяльності, то радимо вам опанувати спеціалізовані математичні пакети, які допомагають школярам і школяркам, студентам і студенткам виконувати технічну роботу під час розв'язування задач. Це, наприклад, *MathLAB*, *MathCAD*. Також корисно опанувати графічний редактор, за допомогою якого можна працювати з геометричними фігурами та будувати креслення. Прикладами таких редакторів можуть бути *CorelDraw*, *Visio* тощо. Якщо ви маєте намір виступити з доповіддю або цікавим повідомленням, то зробити його наочнішим допоможуть **програми для побудови презентацій** (наприклад, *PowerPoint*).

Понад 70 років у нашій державі діє Мала академія наук України (далі — МАН), у наукових відділеннях і численних секціях якої учні та учениці можуть проводити дослідницьку та практичну роботу за найрізноманітнішими напрямами. Ви можете брати участь у роботі її секцій та позашкільному навчанні, турнірах і конкурсах фахової майстерності, всеукраїнських учнівських олімпіадах з базових і спеціальних дисциплін, представляти свої роботи на Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів і учениць — членів МАН.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

Крім того, існує багато програм, створених спеціально для школярів та школярок і призначених для того, щоб допомогти опанувати математику. Ви зможете знайти їх на просторах інтернету.

А може, ви й самі придумаєте корисні програми для вивчення математики?

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Деякі з них — продовження та розвиток вправ цього підручника (такі вправи в тексті підручника позначено значком «», а тут указано номер відповідної вправи).

Завдання, які потребують використання калькулятора, виконуйте за допомогою калькулятора або стандартної програми «калькулятор», що є на вашому комп'ютері.

Тим, хто цікавиться інформатикою, пропонуємо завдання на складання алгоритмів і програм, у яких можна використати отримані математичні знання. Ці завдання позначено зірочкою. Поки ви не опанували на потрібному рівні якунебудь мову програмування, достатньо придумати алгоритм і записати його словами або у вигляді блок-схеми. Зауважимо, що вміння складати алгоритми (послідовності дій) стане вам у пригоді не лише в програмуванні, а й в інших галузях діяльності.

До п. 1 «Раціональні дроби»

Навчіться обчислювати значення дробового виразу за допомогою калькулятора. У яких випадках неможливо обчислити значення дробового виразу? Чи завжди можна отримати точне значення дробового виразу?

2–4. Виконайте які-небудь із цих завдань за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета.

До п. 2 «Основна властивість раціонального дробу»

45, 46. Виберіть який-небудь приклад із цих завдань. Знайдіть значення виразу двічі: спочатку записаного в умові виразу, потім — попередньо скоротивши дріб. Обчислення виконуйте за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета. Наскільки зменшилася кількість дій після скорочення дробу? Чи можна після скорочення виконати обчислення усно?

60. Побудуйте графік функції за допомогою графічного редактора. Який інструмент потрібен, щоби з графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x - 1$?

До п. 3 «Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками»

69, 70. Виберіть який-небудь приклад із цих завдань. Знайдіть значення виразу двічі: спочатку записаного в умові виразу, потім — попередньо спростивши його. Обчислення виконуйте за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета. Наскільки зменшилася кількість дій після спрощення виразу? Чи можна після спрощення виконати обчислення усно?

До п. 4 «Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками»

130. Виконайте це завдання також за допомогою калькулятора. Чи завжди буде отримано «зручний» результат?

До п. 5 «Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня»

152, 153. Виконайте які-небудь приклади із цих завдань за допомогою калькулятора. Який висновок можна зробити про обчислення з дробами, зроблені за допомогою комп'ютера?

До п. 6 «Тотожні перетворення раціональних виразів»

182, 183. Доведіть твердження задачі 182, виконавши обчислення за допомогою калькулятора. Який шлях доведення виявився більш наочним? Чи можна за допомогою калькулятора довести твердження задачі 183?

До п. 7 «Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння»

212. Розв'яжіть цю задачу за допомогою калькулятора.

До п. 8 «Степінь із цілим від'ємним показником»

Чи існує в калькуляторі та в інших програмах, якими ви користуєтеся для обчислень, спосіб подання числа в стандартному вигляді? Опануйте цей інструмент.

* Ознайомтеся з різними типами даних, які пропонує вибрана вами мова програмування для подання дробових чисел. Як зберігаються ці дані в пам'яті комп'ютера? Як впливає спосіб зберігання на точність, з якою подаються ці дані?

253–255. Виконайте яке-небудь із цих завдань, створивши таблицю в табличному редакторі. Використайте засоби автоматичного сортування. Побудуйте на основі отриманої таблиці діаграму. Наскільки наочною вона виявилася? Чому?

Електронний архів видавництва «Ранок»

257. Розв'яжіть цю задачу за допомогою калькулятора. Чим ця задача схожа на задачу 211 і чим відрізняється від неї? Які спільні елементи розв'язування ви використовували для обох задач?

* Побудуйте спільний алгоритм для розв'язування задач 211 і 257. Передбачте можливість використання цього алгоритму для довільної кількості років.

До п. 9 «Властивості степеня із цілим показником»

267. Обчисліть значення якого-небудь виразу з прикладів 5–8 цього завдання, виконуючи дії за допомогою калькулятора в тому порядку, у якому їх записано в прикладі (без попереднього спрощення). Чи отримали ви той самий результат, що й під час розв'язування прикладу на папері? Чому результати можуть відрізнятися? Який висновок із цього можна зробити?

286, 287. Яким чином використання стандартного вигляду числа спрощує обчислення?

* Дізнайтеся, яким чином у пам'яті комп'ютера подаються дані у форматі «з плаваючою крапкою»; за якими алгоритмами виконуються дії з такими числами; як цей спосіб подання даних впливає на точність обчислень.

300. Побудуйте шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Зробіть так, щоб значення функції обчислювались автоматично.

До п. 10 «Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік»

308, 309. Заповніть шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Побудуйте за допомогою засобів графічного редактора графік функції, яка є математичною моделлю задачі. Як треба вдосконалити таблицю, щоб отримати точніший графік?

До п. 11 «Функція $y = x^2$ та її графік»

350–353. Виберіть яку-небудь функцію із цих завдань і побудуйте її графік двома способами. *Перший спосіб*: визначте, з яких геометричних фігур складається цей графік, і зобразіть ці фігури на координатній площині за допомогою графічного редактора. *Другий спосіб*: складіть таблицю, яка містить набір значень аргументу та відповідних їм значень функції, і побудуйте графік за цією таблицею за допомогою відповідних інструментів автоматичної побудови графіків; для цього способу виберіть зовнішній вигляд графіка, у якому

задані точки сполучаються відрізками. Який графік точніше зображає задану функцію? Як треба врахувати особливості цієї функції під час вибору множини значень аргументу для таблиці?

До п. 12 «Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь»

Навчіться добувати квадратний корінь за допомогою калькулятора та інших програм, якими ви користуєтеся для обчислень.

389. Виконайте завдання двома способами: 1) спростивши вираз на папері; 2) обчисливши його значення за допомогою калькулятора без попереднього спрощення. Зробіть висновки.

*** 415.** Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

До п. 13 «Множина та її елементи. Підмножина»

Знайдіть за допомогою інтернету які-небудь цікаві факти та опишіть їх, використовуючи слова «множина», «елемент множини», «підмножина», «порожня множина». Задайте яку-небудь із розглянутих множин переліком елементів і заданням характеристичної властивості.

До п. 14 «Числові множини»

Для кожної із числових множин уведіть у калькуляторі кілька елементів цієї множини. Чи будь-яке раціональне число ви можете ввести з усіма його цифрами? Чи можна ввести ірраціональне число? Наскільки точно подає калькулятор ці числа? Зробіть висновок.

Як у калькуляторі можна задати число π?

Придумайте вираз, у якому змінні будуть раціональними числами, які можна задати точно, а результатом буде дійсне або ірраціональне число, яке калькулятор відображає наближено. Обчисліть значення цього виразу за допомогою калькулятора.

* Зробіть висновки: коли операції з дійсними числами можуть не давати очікуваного результату? Як у таких випадках потрібно домагатися бажаного результату?

448, 449. Виконайте завдання за допомогою калькулятора та/або інших програм, якими ви користуєтеся для обчислень.

До п. 15 «Властивості арифметичного квадратного кореня»

481(6), 497. Виконайте обчислення за допомогою калькулятора, не спрощуючи попередньо вираз. Який спосіб розв'язування виявився простішим — на папері або за допомогою калькулятора?

До п. 16 «Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені»

Обчисліть значення кількох виразів, наведених у задачах **515, 516, 529,** за допомогою калькулятора без попереднього спрощення виразів. Чи буде отримано точний результат?

До п. 17 «Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік»

За допомогою табличного редактора побудуйте таблицю, яка містить набір значень аргументів і відповідних їм значень функції $y = \sqrt{x}$. Побудуйте графік за цією таблицею.

До п. 18 «Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь»

* Запишіть алгоритм для розв'язування неповних квадратних рівнянь залежно від їхнього виду.

До п. 19 «Формула коренів квадратного рівняння»

* Запишіть алгоритм, який за коефіцієнтами a, b і c рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходить його корені. Які окремі випадки потрібно розглянути?

* **654, 655.** Запишіть алгоритми для розв'язування цих задач методом перебору. Яка інформація в умовах цих задач дозволяє зробити висновки, що тут, на відміну від задач 662 і 663, можна застосувати метод перебору?

До п. 20 «Теорема Вієта»

Придумайте два числа, десятковий запис кожного з яких містить кілька цифр до та після коми. Використовуючи наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта, складіть квадратне рівняння, для якого дані числа є коренями. Для обчислень використайте калькулятор.

До п. 21 «Квадратний тричлен»

* Запишіть алгоритм для розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

*** 757.** Створіть математичну модель для розв'язування цієї задачі в загальному вигляді.

*** 760.** Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

До п. 22 «Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь»

* Запишіть алгоритм для розв'язування біквадратних рівнянь. Можна використати як підпрограму алгоритм, який ви уклали для розв'язування квадратних рівнянь (див. завдання до п. 19).

*** 787.** Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

Протягом навчального року в рубриці «Дружимо з комп'ютером» вам було запропоновано багато завдань для розв'язування методом перебору. Проаналізуйте ці завдання та зробіть висновок, чому англійською мовою метод перебору має назву «brute force».

До п. 23 «Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій»

* Чи можна для різних задач цього пункту створити одну й ту саму математичну модель? Спробуйте знайти такі задачі та скласти спільний алгоритм для їхнього розв'язування.

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО

ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самостійно здобувати знання, творчо мислити, формувати, висловлювати та відстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проєктній роботі.

Проєкт — це самостійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проєктом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсах. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником у роботі саме над вибраною темою.
2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника проєкту.
3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.
4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.
5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна навести ілюстративний матеріал.
6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Виконання проєктної роботи в групах дуже корисне. Ви навчитеся працювати в команді, слухати інших, розв'язувати конфлікти та знаходити компроміси. Кожен із вас має свої сильні сторони, і робота в групі дозволяє обмінюватися знаннями та досвідом. Групове обговорення часто породжує більше ідей, ніж індивідуальна робота. У майбутньому вам доведеться працювати в командах, тому групові проєкти допоможуть підготуватися до цього.

Рекомендації щодо виконання проєкту в групах

1. Розподіліть між собою ролі. Кожні з вас повинні мати чітко визначену роль у проєкті (наприклад, дослідниця, організатор, презентерка тощо). Це допомагає уникнути хаосу та забезпечує рівну участь усіх членів групи.
2. Створіть графік виконання завдань, щоб уникнути затягування термінів. Визначте етапи роботи та дедлайни для кожного.
3. Налагодьте регулярну комунікацію між учасниками та учасницями групи. Використовуйте онлайн-платформи (наприклад, Google Docs, Zoom) для обговорення ідей та обміну матеріалами.
4. Усі учасники й учасниці групи повинні розуміти мету проєкту та прагнути до її досягнення. Це допомагає зберегти мотивацію.
5. Після завершення проєкту обговоріть, що вдалося, а що можна покращити. Це допоможе вам вчитися на власному досвіді.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проєктної роботи.

1. **Математичні моделі бюджету родини**
2. **Історія участі команди України в Європейських математичних олімпіадах серед дівчат (EGMO)**
3. **Графіки як математична модель життєвих процесів**
4. **Математика і лінгвістика**
5. **Застосування математики в дослідженні демографічних процесів**
6. **Елементи фінансової математики: націнки та знижки**
7. **Леонард Ейлер — видатний математик**
8. **Математичні терміни та символи. Історія виникнення і розвитку**
9. **Алгоритм Евкліда та лінійні діофантові рівняння**
10. **Парадокси теорії множин**
11. **Мала теорема Ферма**
12. **Пошук інваріанта**
13. **Принцип крайнього**

Комунальне видавництво

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

48. 0,3. **49.** 5. **51.** $\frac{1}{32}$. **52.** Ні. *Вказівка.* Подайте даний дріб у вигляді $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. **56.** 1) Якщо $a=0$, то коренів немає; якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{1}{a}$; 2) якщо $a=0$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$, то $x=1$; 3) якщо $a=6$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 6$, то $x=a-6$; 4) якщо $a=-2$, то коренів немає; якщо $a=2$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq -2$ і $a\neq 2$, то $x=\frac{1}{a+2}$. **57.** 1) Якщо $a=-3$, то коренів немає; якщо $a\neq -3$, то $x=\frac{3}{a+2}$; 2) якщо $a=0$, то коренів немає; якщо $a=9$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 0$ і $a\neq 9$, то $x=\frac{a-9}{a}$. **58.** 13 552 грн. **61.** -4 при $a=2b$.

71. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{1-k}$. **72.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{m+2}$. **73.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **74.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **80.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **81.** 2) -3; 3) $-4{,}5$. **82.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **83.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **84.** 5 медалей. **85.** 1) -2; 2) коренів немає.

105. 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **106.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **109.** 2) 4. **110.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0,1. **111.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **113.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **114.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **116.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **120.** $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Вказівка.* Подайте кожний із доданків у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{1}{(a-1)(a-2)}=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}$. **121.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **124.** *Вказівка.* До кожного з дробів, записаних у лівій частині рівності, додайте 1, а до правої частини додайте 3. **125.** 5 троянд. **126.** Так, треба 5 монет по 5 грн і 3 монети по 2 грн. **127.** На 67,7 %.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Марії Оплачко»
Кафедра природничо-математичної освіти
Видавництво

152. 1) -5; 2) $0{,}9$; 3) -5. **153.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **154.** 83. **155.** 10. **156.** 7 або -7. **157.** 2 або -2. **163.** 50 л, 30 л.

167. 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$.

168. 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) -1; 3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **169.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$. **170.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) -2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **173.** 1) Не залежить; 2) залежить. **175.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **176.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **179.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **180.** 1082,4 грн. **181.** На 9,4 %. **183.** *Вказівка.* Подайте даний вираз у вигляді $10\cdot 3^n - 5\cdot 2^n$. **184.** 480 кг. **185.** 1500 грн, 2100 грн. **186.** 2 год. **187.** 9 горобців, 10 голубів, 11 горлиць.

196. 2) Коренів немає; 3) -2; 4) x — будь-яке число, крім 2; 5) x — будь-яке число; 6) 3; 7) 0,5; 8) коренів немає; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) -4; 4; 14) 0. **197.** 1) -1; 2) коренів немає; 3) 10; 4) коренів немає; 5) x — будь-яке число, крім 0; 6) 6; 7) x — будь-яке число, крім $-0{,}5$; 8) -3; 3. **198.** 7. **199.** 10. **201.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) коренів немає; 3) 7; 4) 0; -2; 5) коренів немає; 6) 0. **202.** 1) $-0{,}5$; 2) -4; 4; 3) коренів немає; 4) -5. **203.** 2 км/год. **204.** 29 км/год. **205.** 9 км/год. **206.** 1) Коренів немає; 2) 0. **207.** 1) 0,6; 2) 0. **208.** 1) Якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; якщо $a = 1$, то коренів немає; 2) якщо $a \neq -5$, то $x = a$; якщо $a = -5$, то коренів немає; 3) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 3; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; якщо $a = 3$, то коренів немає; 4) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$; 5) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо $a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 6) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = a$; якщо $a = 4$ або $a = -2$, то коренів немає. **209.** $a = 2$ або $a = -2$. **210.** $a = -9$, або $a = -3$, або $a = 0$. **212.** 70 000 мешканців і мешканок.

240. 2) 2,7. **241.** 2) $9\frac{47}{125}$. **249.** 5. **250.** 6. **256.** 31 болванка. **257.** 80 000 мешканців і мешканок. **258.** 2 км.

271. 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **272.** 5) 16; 6) 144. **282.** 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0; 6) 2. **283.** 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. **284.** $8\cdot10^{-11}$ см^2. **285.** $1{,}717\cdot10^{-5}$ мм^2. **288.** 8 хв. **289.** 5,34 кг. **290.** У 81 раз. **291.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3+5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **292.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **293.** 1) -1 або 0; 2) 3 або 4; 3) 4 або 5; 4) 2 або 3. **294.** 1) 6 або 7; 2) 4 або 5; 3) 4 або 5; 4) 4 або 5. **296.** 12 км/год. **297.** 5 год 45 хв.

324. 1) 2; 2) -1; 3; 3) коренів немає. **325.** 1) 2; 4; 2) -1; 1; 3) коренів немає. **333.** 1) $a=2$ або $a\leqslant 0$; 2) $a=6$ або $a>3$. **335.** 1) При $k=2{,}25$; 2) такого значення k не існує. **337.** На 31,6 %. **338.** Зменшилася на 9 %. **340.** Коренів немає. **341.** 36 монет, 24 монети.

346. 1) Коренів немає; 2) -1; 3; 3) 2. **347.** 1) -3; -1; 2) коренів немає; 3) -1. **350.** 3) $0<a<4$. **351.** 3) $a=0$ або $a=1$. **352.** 3) $0\leqslant a\leqslant 1$. **353.** 3) $1\leqslant a\leqslant 6$. **362.** 4.

388. 1) -10; 2) 25; 3) $-23{,}8$; 4) 13; 5) 216. **389.** 1) 13,4; 2) 21. **391.** 2) $x\leqslant 0$; 3) x — будь-яке число; 4) $x=0$; 5) $x\geqslant 8$; 6) $x\leqslant 8$; 9) x — будь-яке число, відмінне від 8; 10) $x\geqslant 0$ і $x\neq 9$; 11) $x\geqslant 0$; 12) $x=0$; 13) такого значення x не існує; 14) x — будь-яке число; 15) $x=0$; 16) x — будь-яке число, відмінне від 0. **392.** 2) $y\leqslant 0$; 3) $y\geqslant 0$; 4) $y\leqslant 0$; 5) $y=0$; 6) $y>0$; 7) $y\geqslant 0$ і $y\neq 1$. **393.** 6) -10; 10. **394.** 4) -7; 7. **397.** 1) 167; 2) 2116; 3) коренів немає. **398.** 1) 4900; 2) коренів немає. **399.** 1) Якщо $a\neq 0$ і $b\neq 0$, то a і b — числа одного знака; якщо $a=0$, то b — будь-яке число; якщо $b=0$, то a — будь-яке число; 3) якщо $b\neq 0$, то $a\geqslant 0$; якщо $b=0$, то a — будь-яке число; 5) якщо $a\neq 0$, то $b\leqslant 0$; якщо $a=0$, то b — будь-яке число. **400.** 2) *Вказівка.* $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$. **401.** *Вказівка.* $-x^2+6x-12=-(x-3)^2-3$. **402.** Вираз 2. **403.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) -2; 5) -1; 1; 6) 1. **404.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) 3. **405.** 1) $a>-1$; 2) $a=-1$; 3) $a<-1$. **408.** 1) Якщо $a=0$, то $x\geqslant 1$; якщо $a\neq 0$, то $x=1$; 2) якщо $a=1$, то x — будь-яке число; якщо $a\neq 1$, то $x=0$; 3) якщо $a=0$, то $x\geqslant 1$; якщо $a\neq 0$, то $x=2$; 4) якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a\geqslant 0$, то $x=a^2+2$. **409.** $a<0$ або $a=1$.

410. 44 160 грн. **412.** 13. **413.** $\frac{a+10}{5-a}$. **414.** 27 купюр по 100 грн, 4 купюри по 500 грн.

422. 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\varnothing$. **423.** 4) $\{5\}$. **433.** 32 000 грн, 7360 грн. **434.** 96 дерев. **435.** 1) $\frac{5b+15}{b}$; 2) $\frac{3}{1-b}$. **436.** 1,4 км/год.

455. *Вказівка.* Нехай $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ — дані раціональні числа. Тоді їхня сума дорівнює $\frac{mq+np}{nq}$, тобто є числом виду $\frac{s}{t}$, де $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. **456.** *Вказівка.* Якщо припустити, що дана сума є раціональним числом, то із цього випливає, що дане ірраціональне число можна подати у вигляді різниці двох раціональних чисел. **457.** 1) Ні, наприклад, $\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)=0$; 2) ні, наприклад, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$; 3) ні, наприклад, $\sqrt{3}\cdot 0=0$. **459.** У третьому під'їзді на шостому поверсі. **460.** $\frac{b^2}{a}$. **461.** 120 га.

491. 1) Ні при якому значенні x; 2) 3; 3) -1; 3. **492.** 1) -4; 2) 2. **495.** 12 пляшок. **497.** -4.

525. 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **526.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **528.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **529.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **536.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$. **537.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$. **538.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **539.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **540.** 2) Оскільки з умови випливає, що $b\leqslant 0$, то $b\sqrt{-b}=-\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **541.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **542.** 1) $\sqrt{a}-1$;

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ІРІО»

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $\frac{22}{9-a}$. **543.** 1) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 2) $\sqrt{x}$. **544.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **545.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **546.** 9. **549.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **551.** 37,5 %. **552.** 180 деталей. **553.** 18 %. **554.** 9.

567. $\sqrt{17}$. **568.** $\sqrt{6}$. **575.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) коренів немає; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **577.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **578.** 2) $-\sqrt{2}$. **579.** 0. *Вказівка.* Ліва частина цього рівняння набуває тільки невід'ємних значень, а права — тільки недодатних. **584.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **585.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **586.** Якщо $a \geqslant 0$, то один корінь; якщо $a < 0$, то коренів немає. **587.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **588.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **589.** Олена. **590.** У магазині «Модний одяг». **591.** 63 кг. **592.** 3 км/год. **593.** 1 год 12 хв.

612. 1) 0; 14; 2) коренів немає. **613.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **618.** 6; 7. **619.** 9; 10. **620.** -1; 0 або 0; 1. **621.** -3; -2 або 3; 4. **622.** 1) 4; 2) 0; -8; 3) -9; 9. **623.** 1) -5; 2) такого значення m не існує. **628.** 1) 0; -3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2; 2. **629.** 1) 0; 7; -7; 2) 0; 5; -7; 3) $-1{,}5$; 1,5. **630.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; -2; 4) такого значення не існує. **631.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ або $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **632.** 1200 грн. **633.** 378 грн.

643. 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **644.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) -3; $\frac{1}{7}$. **645.** 1) 4; $-3{,}5$; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$. **646.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$. **647.** 7. **648.** 38 см. **649.** 6 і 14 або -14 і -6. **650.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) -1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{31}{22}$. **651.** 1) $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **652.** -20; 4. **653.** 1; $-\frac{4}{3}$. **654.** 10; 11. **655.** 13; 14. **656.** 8 см. **657.** 6 см або 12 см. **658.** 16 см, 30 см. **659.** 9 см, 40 см. **661.** 16 мавп або 48 мавп. **662.** 9; 11; 13. **663.** 4; 6; 8; 10. **664.** 9 команд. **665.** 15 сторін.

Видавництво «Ранок»

666. 1) $-8; -7; 0; 1$; 2) $-1; 1; 0{,}6; -0{,}6$; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) $-2; 2$; 5) $3; 5; -3; -5$; 6) $2; -2$. **667.** 1) $-12; 2; -2; -8$; 2) 3; 3) $15; -7\pm\sqrt{34}$; 4) $9; -9$. **668.** 1) -10; 2) 3. **669.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **670.** 1) $b=-2$; 2) $b=-12$ або $b=12$. **671.** 1) $b=13{,}5$; 2) $b=-8$ або $b=8$. **675.** 1) $x=-2a-1$ або $x=-a$; 2) $x=2a$ або $x=4$; 3) якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{25}{a}$ або $x=-\frac{1}{a}$, якщо $a=0$, то коренів немає; 4) якщо $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$, якщо $a\neq\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$ або $x=\frac{1}{2a-1}$. **676.** 1) $x=3a-5$ або $x=-a$; 2) $x=-3a$ або $x=4$; 3) якщо $a=0$, то $x=1$; якщо $a\neq 0$, то $x=1$ або $x=\frac{1}{a}$. **677.** 1) $b=0$ або $b=-\frac{9}{7}$; 2) $b=-5$, або $b=2\sqrt{6}$, або $b=-2\sqrt{6}$; 3) $b=19$. **678.** 1) $b=0$, або $b=-0{,}5$, або $b=0{,}5$; 2) $b=-3$ або $b=-5$. **679.** 17 вагонів. **680.** 14 аркушів. **682.** $\frac{a-b}{a}$. **683.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **684.** 90 деталей. **685.** 45 т, 75 т.

699. $x_2=10$, $q=-20$. **700.** $x_2=-6$, $p=-1$. **701.** $x_2=2$, $b=14$. **702.** $x_2=1{,}6$, $m=-1{,}28$. **703.** $-20{,}5$. **704.** -7. **705.** $\sqrt{17}; -\sqrt{17}$. **709.** $x_1=1$, $x_2=9$, $c=9$. **710.** $x_1=-14$, $x_2=-6$, $a=84$. **711.** $x_1=9$, $x_2=-2$, $m=-18$. **712.** $x_1=1$, $x_2=-5$, $n=-5$. **715.** 1) 1,5; 2) 69. *Вказівка.* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **716.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Вказівка.* $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$. **717.** $x^2+12x+17=0$. **718.** $x^2-18x+49=0$. **719.** $6x^2-14x+3=0$. **720.** $x^2-15x+8=0$. **721.** $a=2$ або $a=-2$. **722.** $a=6$ або $a=-6$. **724.** 1) $7; -7; 5; -5$; 2) $-11; 11; -1; 1$; -4; 4. **725.** 1) $-9; 9; -6; 6$; 2) $-17; 17; -7; 7; -3; 3$. **726.** $b=c=0$ або $b=1$, $c=-2$. **727.** 1) $a=2$; 2) такого значення a не існує. **728.** $a=2$. **729.** 150. **730.** На 25 %. **733.** 4 ряди по 12 дерев.

742. 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **743.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{a+1}{a-5}$; 3) $\frac{3-b}{b-1}$. **744.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **745.** 1) -4; 2) -14. **746.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$. **750.** 1) $(x-y)\times$

$\times (x - 5y)$; 2) $(a + 9b)(a - 4b)$; 3) $(3m + n)(m - 3n)$; 4) $(4x - y)(x - y)$. **751.** 1) $(a - 4b)(a - 10b)$; 2) $(3b - 2c)(4b + 3c)$. **752.** 1) Якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) якщо $a = 7$, то x — будь-яке число; якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 7$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **753.** Якщо $a = -8$, то x — будь-яке число; якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq -8$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **755.** 2^{15} кілобайти. **757.** 6,8 %. **759.** 1) Коренів немає; 2) -4; 3) 3; 4) y — будь-яке дійсне число, відмінне від -4 і від 5.

763. 1) -4; 1; 2) -1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) -2; 10; 5) 7; 6) -6; 7) -5; 10; 8) 5. **764.** 1) -1; 2) $-0{,}25$; 3) 8; 4) -3. **769.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **770.** 1) 10; 2) -7. **771.** 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) -23; 1; 3) -27; -1; 4) 3. **772.** 1) 4; 9; 2) 5. **773.** 1) -2; 9; 2) 4; $-0{,}4$; 3) -1; 18; 4) -2; 5) -3; 6) 2; 7) 9; 8) 1. **774.** 1) -3; 12; 2) -3; 13; 3) -60; 50; 4) -3; 5) -9; 24; 6) -20; 2. **775.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) -56; 60. **776.** 1) -15; 12; 2) -20; 2. **777.** 1) -5; 2) коренів немає. **778.** 1) -15; 1; 2) 1,5. **779.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3; 3; 2) -6; -4; -1; 1; 3) 0; 3; 4) -1; -3; 1. **780.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **781.** 1) -1; 7; 2; 4; 2) -6; -2; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) -2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **782.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = 7$; якщо $a = 7$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = 1$ або $x = 7$; 2) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = a$; якщо $a = 1$ або $a = 7$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq 2$ і $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ або $x = 2$; якщо $a = 2$ або $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, відмінне від -3; якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то $x = a$. **783.** $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$. **785.** 1) $a = 0$ або $a > 4$; 2) $a = 4$; 3) $0 < a < 4$.

788. 50 км/год, 60 км/год. **789.** 75 км/год. **790.** 80 км/год, 60 км/год. **791.** 12 сторінок. **792.** 30 м^3, 25 м^3. **793.** 6 днів. **794.** 31 км/год. **795.** 10 км/год. **796.** 3 км/год. **797.** 32 км/год.

798. 45 днів, 36 днів. **799.** 15 год, 10 год. **800.** 21 год, 24 год. **801.** 80 г. **802.** 30 кг. **803.** 3 км/год. **804.** 5 год. **805.** 4 год, 6 год, 12 год. **806.** 80 км/год. **807.** 24 деталі. **808.** 12 год. **810.** 6.

824. 3) $\frac{8}{3}$. **830.** 4) 1, 2, 3. **833.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **834.** *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої та правої частин даної рівності. **883.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **905.** $a=1$. **906.** $a=3$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	А	А	Г	В	Г	В	Г	Б	В	1–В; 2–Г; 3–А
2	Б	Г	Б	Г	А	А	В	В	Б	В	А	1–В; 2–А; 3–Б
3	В	Г	В	Б	В	А	Б	Г	А	А	Г	1–Д; 2–Б; 3–Г
4	В	Б	Б	В	В	А	В	Г	В	В	А	1–Г; 2–В; 3–Б
5	В	Г	Г	В	А	А	Б	А	Г	Б	А	1–А; 2–В; 3–Д
6	Г	В	А	Б	А	В	В	А	Г	Б	В	1–Д; 2–Б; 3–В

КОПІЯ КУРСНИЦЬКОГО ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вершина параболи 107
Винесення множника з-під знака кореня 152
Вирази дробові 6
— раціональні 6
— цілі 6
Вітка гіперболи 91
— параболи 107
Властивості арифметичного квадратного кореня 143
— степеня із цілим показником 80
Внесення множника під знак кореня 152

Гіпербола 91
Графічний метод розв'язування рівнянь 94

Дискримінант квадратного рівняння 187
— — тричлена 208
Допустимі значення змінних 7
Дріб нескінченний неперіодичний десятковий 134
— — періодичний десятковий 133
— раціональний 7

Елемент множини 126

Корінь квадратний 112
— — арифметичний 113
— квадратного тричлена 208

Метод заміни змінної 215
Множина 126
— дійсних чисел 135
— натуральних чисел 132
— порожня 128
— раціональних чисел 132
— цілих чисел 132

Обернена пропорційність 89
Основна властивість раціонального дробу 12

Парабола 107
Період дробу 133
Підкореневий вираз 113
Підмножина 128
Порядок числа 72

Радикал 113
Рівні множини 126
Рівняння біквадратне 215
— квадратне 179
— — зведене 179
— — неповне 179
— лінійне 178
— першого степеня 178
— раціональне 61
— рівносильні 61

Стандартний вигляд числа 72
Степінь з нульовим показником 71
— із цілим від'ємним показником 71

Теорема Вієта 197
—, обернена до теореми Вієта 197
Тотожність 12
Тотожно рівні вирази 12
Тричлен квадратний 208

Формула коренів квадратного рівняння 186

Числа дійсні 135
— ірраціональні 134
— натуральні 132
— раціональні 132
— цілі 132

Комунальний заклад «Видавничий центр «Гімназія»

ЗМІСТ

Від авторів 3

Умовні позначення 5

§ 1. Раціональні вирази 6

1. Раціональні дроби 6
2. Основна властивість раціонального дробу 11
3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками 22
4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками 27

Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі 36

Готуємося до тематичного оцінювання 38

5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня 38
6. Тотожні перетворення раціональних виразів 48

• Перша жінка, яка отримала докторський ступінь ... 56

Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі 58

Готуємося до тематичного оцінювання 60

7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння 60
8. Степінь із цілим від'ємним показником 70
9. Властивості степеня із цілим показником 80
10. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік 89

Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі 100

Готуємося до тематичного оцінювання 102

Головне в параграфі 1 103

§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа 106

11. Функція $y = x^2$ та її графік 106
12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь 112

• Чи ростуть у городі радикали? 124

• Перша задача першої математичної олімпіади в Україні 125

13. Множина та її елементи. Підмножина 125

КОПІЯ ВИДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»

14. Числові множини 132
• Відкриття ірраціональності 141
15. Властивості арифметичного квадратного кореня 143
16. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені 152
17. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік 165
Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі 173
Готуємося до тематичного оцінювання 175
Головне в параграфі 2 176

§ 3. Квадратні рівняння 178
18. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь 178
19. Формула коренів квадратного рівняння 186
20. Теорема Вієта 196
Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі 205
Готуємося до тематичного оцінювання 207
21. Квадратний тричлен 208
22. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь 214
• Розв'язування рівнянь методом заміни змінної 221
• Таємна зброя Сципіона дель Ферро 224
23. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій 226
• Перша ЕОМ в Європі 232
Завдання № 6 «Перевірте себе» в тестовій формі 234
Готуємося до тематичного оцінювання 236
Головне в параграфі 3 237

Вправи для повторення курсу алгебри 8 класу 239

Дружимо з комп'ютером 252

Проєктна робота 259

Відповіді та вказівки до вправ 261

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі 268

Предметний покажчик 269

КОПІЯ ВІДДАВНИЦТВО «ГІМНАЗІЯ»